
Hosted by Google

THÉORIE

DES

FONCTIONS ALGÉBRIQUES

DE

DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
27168 Quai des Grands-Augustins, 55.

THÉORIE

DES

FONCTIONS ALGÉBRIQUES

DE

DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES,

PAR

ÉMILE PICARD,
MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE PARIS,

ET

GEORGES SIMART,
CAPITAINE DE FRÉGATE, RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TOME II.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1906

INTRODUCTION.

Le premier fascicule (Chap. I à VII) de ce Tome II de notre *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* a paru au commencement de 1900; le second fascicule (Chapitre VIII à XI) au commencement de 1904; nous terminons aujourd'hui cette publication qu'ont retardée diverses circonstances. Ces retards m'ont permis de compléter divers points de mes recherches, en particulier la théorie des intégrales doubles de seconde espèce, intimement liée à la périodicité de ces intégrales; elle tient une place importante dans ce Volume et se trouve, je crois, fixée maintenant dans ses parties essentielles. Sur des sujets aussi nouveaux, on ne s'étonnera pas de rencontrer de nombreuses questions qui ne sont qu'amorcées; parmi elles je signalerai, entre plusieurs autres, ce qui concerne les intégrales de différentielles totales de troisième espèce, où j'ai introduit un entier ρ, qui, considéré récemment par M. Severi sous un nouveau point de vue, demandera une étude plus complète.

La théorie des fonctions algébriques de deux variables, tracée aujourd'hui dans ses grandes lignes, a fait dans ces derniers temps, surtout en Italie, l'objet de recherches importantes. Le point de vue fonctionnel et le point de vue géométrique se rejoignent en plusieurs endroits de la théorie;

on en a des exemples dans les beaux travaux de M. Humbert, de MM. Castelnuovo et Enriques, de M. Severi, et même dans la théorie des intégrales doubles qui paraît d'abord bien éloignée de la géométrie, où la recherche du nombre des cycles à deux dimensions m'a conduit à un invariant relatif déjà rencontré dans des études très différentes.

On trouvera à la fin de ce Volume quelques Notes où sont reproduites des recherches que je n'ai pas achevées et qui paraissent pouvoir être utilement poursuivies. Dans plusieurs Chapitres de cet Ouvrage, nous avions étudié diverses théories géométriques ayant leur origine dans les mémorables travaux de M. Nœther, qui fut là un précurseur, et de M. Zeuthen. MM. Castelnuovo et Enriques ont bien voulu nous donner une Note extrêmement intéressante qui complète notre étude et donne sur toutes ces questions l'état actuel de la Science. Nous les en remercions vivement; leurs indications bibliographiques, jointes à celles du texte, seront en outre très utiles à ceux qui désireront s'occuper des fonctions algébriques de deux variables et des surfaces algébriques.

Émile PICARD.

Paris, le 15 janvier 1906.

THÉORIE

DES

FONCTIONS ALGÉBRIQUES

DE

DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES.

CHAPITRE I.

THÉORÈME DE NŒTHER RELATIF AUX COURBES ET SURFACES PASSANT PAR L'INTERSECTION DE DEUX AUTRES.

I. — Cas des courbes [1].

1. Soient deux courbes $\varphi = 0$, $\psi = 0$, occupant une position arbitraire par rapport aux axes de coordonnées, et $f(x, y)$ un polynome. On se propose de rechercher, *d'après la façon dont se comporte la fonction $f(x, y)$ dans le voisinage de tout point (a, b) commun aux deux courbes φ et ψ*, s'il est possible de mettre f sous la forme

$$f = A\varphi + B\psi. \tag{1}$$

A et B étant deux polynomes.

---

[1] Ce théorème a été donné pour la première fois par M. Nœther dans le t. VI des *Math. Annalen*. Depuis, l'illustre géomètre y est revenu à diverses reprises (*Math. Annalen*, t. XXX, XXXIV et LX). La même proposition a fait aussi l'objet des très intéressantes recherches de M. Voss (*Math. Annalen*, t. XXVII), de M. Stickelberger (*Id.*, t. XXX), de M. Bertini (*Id.*, t. XXXIV), et de Halphen (*Bulletin de la Société Math. de France*, t. V).

Nous allons chercher d'abord une condition, nécessaire et suffisante, pour que f soit de la forme (1), et où ne figurera pas le *comportement* [1] de f dans le voisinage des points de rencontre (a, b).

2. Soit $\Phi(x)$ le résultant de φ et de ψ,

$$\Phi(x) = \lambda\varphi + \mu\psi, \tag{2}$$

et supposons que $\Phi(x)$ contienne $(x-a)$ à la puissance k. D'autre part, divisons λf par ψ, et soit n le degré de ψ; on aura

$$\lambda f = \nu\psi + X \tag{3}$$

où X est un polynome en x et y, de degré $n-1$ en y au plus.

Si f est susceptible de se mettre sous la forme (1), on conclut immédiatement des relations (2) et (3) l'identité

$$X = A\Phi + \psi(B\lambda - A\mu - \nu). \tag{4}$$

Le premier membre est au plus du degré $n-1$ en y, le second membre est au moins du degré n. Les points d'intersection de la courbe $X = 0$ avec la droite $x - a = 0$ se trouvent aux points d'intersection de $\psi(B\lambda - A\mu - \nu) = 0$ avec la droite $(x-a) = 0$, et comme ψ ne contient pas $(x-a)$ en facteur, le nombre de ces points est au moins égal à n. On en conclut que X, de degré $n-1$ au plus en y, est divisible par $x-a$: donc aussi $B\lambda - A\mu - \nu$.

Effectuant la division, et continuant le même raisonnement de proche en proche, on arrive à la conclusion que X est divisible par $(x-a)^k$. Donc finalement X est divisible par Φ.

3. Réciproquement si X est divisible par Φ, on pourra mettre f sous la forme (1). En effet, soit $X = P\Phi$, on aura identiquement

$$\lambda f = P\lambda\varphi + \psi(\nu + P\mu);$$

donc λ divise le produit $\psi(\nu + P\mu)$. Or, en vertu de la relation (2), λ et ψ ne peuvent avoir en commun que des polynomes en x seul, ce qui est impossible puisque ψ n'admet pas de diviseur ne renfer-

---

[1] Nous demandons la permission d'introduire ce mot un peu vieilli, pour ne pas répéter toujours « *la manière dont se comporte* la fonction ».

mant que x. Par suite, $\nu + P\mu$ est divisible par λ, et, en effectuant la division, on obtient pour f une expression de la forme (1).

Donc *la condition nécessaire et suffisante pour que f soit susceptible d'être mis sous la forme* $A\varphi + B\psi$ *est que* X *soit divisible par* Φ.

4. A cette condition nous allons en substituer une autre relative au comportement de f dans le voisinage des points (a, b) de rencontre des deux courbes φ et ψ.

Supposons que le point (a, b) soit un point multiple d'ordre r pour ψ, d'ordre q pour φ, avec $q \leqq r$, et que la droite $x = a$, qui coupe ψ en r points confondus en (a, b), la coupe, en outre, en $n - r$ autres points simples $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$, n'appartenant pas à φ.

A′ et B′ étant des polynomes d'abord arbitraires, effectuons la différence

$$f - A'\varphi - B'\psi = C', \tag{5}$$

et soit $k' + 1$ le degré des termes de moindre degré dans C′ supposé développé suivant les puissances croissantes de $x - a$ et $y - b$. Désignons par l le degré des termes de moindre degré dans le polynome λ [figurant dans (2)] supposé développé suivant les mêmes puissances. Nous allons montrer que *si* X *est divisible par* Φ, *on pourra toujours trouver en chaque point* (a, b) *des polynomes* A′ *et* B′ *de manière que l'inégalité*

$$l + k' + 1 \geqq r + k - 1 \tag{6}$$

soit satisfaite, et que réciproquement, si l'on peut déterminer A′ *et* B′ *pour chaque point* (a, b) *de manière que cette relation soit satisfaite,* X *sera divisible par* Φ.

5. La première partie de la proposition est évidente, puisque, si X est divisible par Φ, on peut déterminer A et B de manière à avoir identiquement

$$f - A\varphi - B\psi = 0.$$

La réciproque s'établit de la manière suivante : Par une série de calculs analogues à ceux faits précédemment, on arrive à une iden-

tité de la forme

$$X = A'\Phi + C\psi + C'\lambda,$$

en posant

(7) $$C = B'\lambda - A'\mu - \nu.$$

Soit $\Phi = (x-a)^k \Phi'$, nous allons montrer que X est divisible par $(x-a)^k$ du moment que la relation (6) est satisfaite. Partons de l'identité

(8) $$X = A'(x-a)^k \Phi' + C\psi + C'\lambda$$

dont nous supposerons les deux membres développés suivant les puissances croissantes de $(x-a)$ et $(y-b)$. Par hypothèse, $C'\lambda$ commencera par des termes de degré au moins égal à $r+k-1$, donc à r.

Les points de rencontre de la droite $x=a$ avec $X=0$ sont aux points de rencontre de cette droite avec la courbe $C\psi + C'\lambda = 0$. Or cette courbe possède déjà, en vertu de l'hypothèse faite, un point d'ordre au moins égal à r au point (a, b). D'autre part λ, en vertu de la relation (2), s'annule aux points $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$. Donc la courbe $X=0$ est coupée par la droite $x=a$ en au moins n points, et comme X est au plus du degré $n-1$ en y, il s'ensuit que X est divisible par $x-a$. La démonstration est achevée ainsi, si $k=1$.

Si $k>1$, on posera $X=(x-a)X_1$, X_1 étant encore de degré $n-1$ au plus en y, d'où l'on conclut que $C\psi + C'\lambda$ contient $(x-a)$ en facteur; donc tous les termes homogènes du même degré en $(x-a)$, $(y-b)$, et en particulier les termes de $C\psi$ d'ordre inférieur à $l+k'+1$, contiennent $x-a$ en facteur. Or ψ ne contient pas $(x-a)$ en facteur; par suite, on peut écrire

$$C = (x-a)\,C_1 + C'',$$

C'' étant de degré au moins égal à $l+k'-r$; en sorte que nous pouvons substituer à la relation (9), la relation

(9) $$(x-a)X_1 = A'(x-a)^k\Phi' + (x-a)\,C_1\psi + C''\psi + \lambda C',$$

d'où l'on conclut que $C''\psi + \lambda C'$ contient $(x-a)$ en facteur

(10) $$C''\psi + \lambda C' = (x-a)C'_1,$$

et que C'_1 commence par des termes de degré au moins égal à $k'+l$. Or de la relation (6) il résulte $k'+l>r$; donc la droite $x=a$ coupe la courbe $C'_1=0$ au point (a,b) en au moins r points confondus. Mais C'_1 s'annule aussi aux points (a,c); en effet, de la relation $\Phi=\lambda\varphi+\mu\psi$ il résulte que si (x,y) se déplace sur la courbe $\psi(x,y)=0$ dans le voisinage du point (a,c), la fonction λ contiendra $(x-a)^k$ en facteur, quand on aura remplacé $y-c$ par son développement en $x-a$, puisque Φ contient $(x-a)^k$ en facteur et que $\varphi(a,c)\neq 0$. Donc C'_1, qui est défini par la relation (10), contiendra $(x-a)^{k-1}$ en facteur et s'annulera aux points (a,c); on en conclut finalement que la courbe

$$X_1=A'(x-a)^{k-1}\Phi'+C_1\psi+C'_1=0,$$

qui est de degré au plus égal à $n-1$ en y, est coupée par la droite $x=a$ en n points au moins, donc que X_1 est divisible par $(x-a)$.

La démonstration est achevée si $k=2$.

Si $k>2$, on continuera le même mode de raisonnement, sans qu'il y ait rien à y changer.

Ainsi, en définitive, X sera divisible par Φ, et par suite *f sera susceptible de se mettre sous la forme $A\varphi+B\psi$, si en chaque point (a,b) de rencontre des courbes φ et ψ on peut déterminer des polynomes A' et B' tels que la différence $f-A'\varphi-B'\psi$ ordonnée suivant les puissances croissantes de $(x-a)$ et $(y-b)$ commence par des termes d'ordre $k'+1$ satisfaisant à l'inégalité*

$$l+k'+1\geqq r+k-1.$$

6. Cette relation est susceptible d'une forme plus simple dans le cas où les deux courbes φ et ψ n'ont pas de tangentes communes en leurs points de rencontre, c'est-à-dire dans le cas où $k=qr$. Reprenons la relation

$$\Phi=\lambda\varphi+\mu\psi$$

ou

$$\Phi=(\lambda_l+\lambda_{l+1}+\ldots)(\varphi_q+\varphi_{q+1}+\ldots)+(\mu_m+\ldots)(\psi_r+\ldots),$$

en mettant en évidence les termes homogènes de même degré, dans le développement suivant les puissances croissantes de $(x-a)$ et $(y-b)$. Si Φ contient $(x-a)^k$ en facteur, le second

membre doit commencer par un terme en $(x-a)^k$. Si donc $l+q<k$, on devra avoir

$$\lambda_l \varphi_q + \mu_m \psi_r = 0,$$

et comme φ_q et ψ_r sont premiers entre eux, on aura

$$\lambda_l = -a\psi_r,$$
$$\mu_m = a\varphi_q,$$

a étant un polynome.

Mais on peut écrire

$$\Phi = (\lambda + a\psi)\varphi + (\mu - a\varphi)\psi$$

et alors nous avons une forme analogue pour Φ, mais dans laquelle le degré de λ a augmenté d'une unité. On peut donc faire en sorte que $l+q \geqq k$.

Dans ces conditions, si l'on peut déterminer A' et B' de manière que

$$(11) \qquad k'+1 \geqq r+q-1$$

la relation (6) sera satisfaite.

7. Voici encore une remarque intéressante. La fonction f étant de la forme $A\varphi + B\psi$, désignons par μ, m, n les degrés respectifs de f, φ, ψ et supposons que les termes homogènes de plus haut degré, φ_m et ψ_n, dans φ et ψ, soient sans facteurs communs. Dans ce cas, on peut toujours faire en sorte que A et B soient d'ordre $\mu - m$ et $\mu - n$.

Supposons, en effet, que A et B soient de degrés respectifs $\mu - m + \rho$ et $\mu - n + \rho$ et désignons par $A_{\mu-m+\rho}$, $B_{\mu-n+\rho}$ l'ensemble des termes homogènes de plus haut degré, on devra avoir

$$A_{\mu-m+\rho}\varphi_m + B_{\mu-n+\rho}\psi_n = 0,$$

donc, en désignant par a un polynome,

$$A_{\mu-m+\rho} = a\psi_n, \qquad B_{\mu-n+\rho} = -a\varphi_m;$$

D'où l'on conclut en écrivant f sous la forme

$$f = (A - a\psi)\varphi + (B + a\varphi)\psi,$$

que les degrés des coefficients de φ et ψ peuvent être diminués

d'une unité au moins. Continuant ainsi de proche en proche, on arrive ainsi au résultat annoncé.

II. — Quelques applications.

8. Une première application importante du théorème de Nœther est la suivante : *φ et ψ étant deux courbes qui n'ont pas de tangentes communes en leurs points de rencontre, et q et r ayant la même signification que précédemment, supposons que la courbe f ait, pour points multiples d'ordre $q+r-1$, chaque point de rencontre de φ et ψ; dans ce cas on aura certainement*

$$f = A\varphi + B\psi.$$

En effet, on peut, en chaque point de rencontre, choisir A′ et B′ de manière que

$$f - A'\varphi = B'\psi$$

commence par des termes de degré $q+r-1$: il suffit de prendre $A' = B' = 0$.

9. Proposons-nous en second lieu de *reconnaître si une expression de la forme*

$$\frac{P(x, y)}{(\alpha x + \beta y + \gamma)^r},$$

où P *désigne un polynome, est susceptible de se mettre sous la forme d'un polynome en x et y, y étant une fonction algébrique de x définie par l'équation*

$$f(x, y) = 0$$

supposée de degré m.

Nous supposerons d'ailleurs que la courbe f n'a que des points doubles et est orientée arbitrairement par rapport aux axes.

Il s'agit, en d'autres termes, de savoir si $P(x, y)$ peut se mettre sous la forme

$$P(x, y) = A f(x, y) + B(\alpha x + \beta y + \gamma)^r.$$

Supposons d'abord que la droite $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ne soit pas tangente à la courbe f et ne passe pas par un point double. Soit (a, b) un point commun à f et à $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$; ce point est

d'ordre $q=1$ pour f et d'ordre r pour la courbe $(\alpha x+\beta y+\gamma)^r=0$. Appliquons la formule (6) du n° 5. Dans le cas actuel, on voit en formant le résultant de f et de $(\alpha x+\beta y+\gamma)^r$ que le nombre désigné par l est au moins égal à $r-1$, que k est égal à r : on en déduit $k'+1\geq r$. Pour que la représentation soit possible, on devra donc pouvoir déterminer A' et B' de manière que l'expression

$$P - A'f - B'(\alpha x+\beta y+\gamma)^r,$$

dans le voisinage de tout point de rencontre (a, b) commence par un terme de degré r.

Posons, en mettant en évidence les ensembles de termes homogènes de même degré en $x-a$ et $y-b$:

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + \ldots, \\ f &= f_1 + f_2 + \ldots, \\ A' &= A'_0 + A'_1 + \ldots, \\ B' &= B'_0 + B'_1 + \ldots. \end{aligned}$$

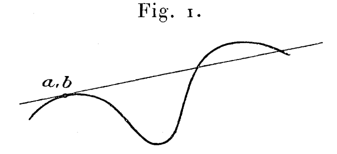
On devra avoir les relations

$$\begin{aligned} P_1 - A'_0 f_1 &= 0, \\ P_2 - A'_0 f_2 - A'_1 f_1 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&, \\ P_{r-1} - A'_0 f_{r-1} - \ldots - A'_{r-2} f_1 &= 0. \end{aligned}$$

Telles seront, par conséquent, les formes de $P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}$ pour que la représentation soit possible.

Supposons maintenant que $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ soit tangente à la

Fig. 1.



courbe f en un point (a, b) et que le contact soit simple. Bornons-nous d'ailleurs au cas où $r=1$. Pour les points en dehors du point de contact, $P(x, y)$ doit simplement y passer.

Relativement au point de contact (a, b) on a $k=2$, $r=1$, $l=0$, donc $k'+1=2$. On devra pouvoir déterminer A' et B' de manière que l'expression

$$P - A'f - B'(\alpha x+\beta y+\gamma)$$

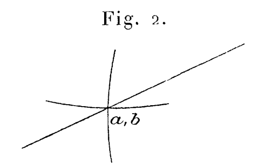
développée suivant les puissances de $x-a$, $y-b$, commence par des termes du second degré. P_1 est, par suite, de la forme

$$A'_0 f_1 + B'_0[\alpha(x-a)+\beta(y-b)],$$

c'est-à-dire que la courbe $P(x, y)=0$ doit être tangente en (a, b) à $f(x, y)=0$.

Finalement considérons le cas où la droite $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ passe par un point double, en supposant toujours $r=1$. On a $k=2$, $l=0$, $r=1$, donc $k'+1=2$.

Fig. 2.



Par suite

$$P - A'f - B'(\alpha x+\beta y+\gamma)$$

doit commencer par des termes du second degré, ce qui exige que l'on ait

$$P_1 = B'_0[\alpha(x-a)+\beta(y-b)],$$

donc que la courbe $P(x, y)=0$ soit tangente en (a, b) à la droite.

10. La question précédente nous conduit à rechercher *quelle est l'expression générale des fonctions rationnelles* $\frac{M}{N}$ *de* x *et* y, *restant finies toujours à distance finie,* y *étant une fonction algébrique de* x *définie par l'équation* $f(x, y)=0$. Nous aurons plusieurs fois à faire usage du résultat dans le cours de ce Volume.

Remarquons tout d'abord que l'expression $\frac{M}{N}$ peut se mettre sous la forme d'une somme de termes telle que

$$\frac{P(x, y)}{(x-a)^\alpha}$$

et considérons en premier lieu le cas où la droite $x=a$ ne correspond pas à un point de contact ou à un point double de la courbe f.

Dans ces conditions, $\frac{P(x, y)}{x-a}$ devra garder une valeur finie aux points de rencontre à distance finie de la droite $x=a$ avec la courbe f : donc, $P(x, y)$ devant s'annuler en ces points, on pourra

mettre $\frac{P(x, y)}{x-a}$ sous la forme d'un polynome ; et, en continuant le raisonnement de proche en proche, il en sera de même de $\frac{P(x, y)}{(x-a)^\alpha}$. Dans le cas où la droite $x-a=0$ est tangente à la courbe f, au point (a, b), il faudra encore que $\frac{P(x, y)}{x-a}$ reste finie au point (a, b) et aux autres points de rencontre c de la droite et de la courbe f. Ce qui exige, en posant

$$P(x, y) = A(x-a) + B(y-b) + \ldots,$$

que l'on ait $B = 0$. La courbe P doit donc passer par les points c et être tangente à la droite $x=a$ au point (a, b). Les conclusions sont encore les mêmes, et l'expression $\frac{P(x, y)}{(x-a)^\alpha}$ se réduit encore à un polynome.

Supposons enfin que la droite $x-a=0$ passe par un point double (a, b) de la courbe f. Dans le cas où $\alpha = 1$, l'expression

$$\frac{P(x, y)}{x-a}$$

n'est susceptible, en général, d'aucune réduction. Soit alors $\alpha > 1$, l'expression précédente devra s'annuler au point (a, b) et aux points c. Posons

$$P(x, y) = A(x-a) + B(y-b) + \ldots$$

et soient

$$\begin{aligned} y-b &= \mu\,(x-a) + \ldots \\ y-b &= \mu'(x-a) + \ldots \end{aligned} \qquad (\mu \neq \mu')$$

les équations des deux branches de la courbe f qui passent par le point (a, b). On aura

$$A + B\mu = 0, \qquad A + B\mu' = 0$$

donc $A = B = 0$, d'où l'on conclut que la courbe P a, au point (a, b), un point double. P doit d'ailleurs s'annuler aux points c, et, par suite, $\frac{P(x, y)}{x-a}$ sera un polynome. En continuant de proche en proche, on réduit l'expression $\frac{P(x, y)}{(x-a)^\alpha}$ à une expression de la forme $\frac{P(x, y)}{x-a}$ et ici la réduction est achevée.

Finalement *les fonctions rationnelles de x et y, où x et y sont liées par l'équation $f(x, y) = 0$, qui restent toujours finies à distance finie sont de la forme*

$$\frac{P(x, y)}{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_d)},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_d$ étant les abscisses des points doubles de la courbe f, et P étant un polynome qui s'annule aux points de rencontre des droites $x - a_i = 0$ avec la courbe.

III. — Définition générale des adjointes. Théorème du reste [1].

11. Dans le cas d'une courbe n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes, la notion d'*adjointe* à une courbe donnée $f(x, y) = 0$, est la suivante : c'est une courbe ayant au moins comme point multiple d'ordre $i - 1$ un point multiple d'ordre i de la courbe f.

12. Considérons maintenant le cas d'une courbe f ayant des singularités arbitraires, et soit $x = 0$, $y = 0$ un point multiple d'ordre n : il s'agit de définir la façon dont se comporte une adjointe en ce point. Cette adjointe $\lambda(x, y)$ jouira des propriétés suivantes :

D'abord elle doit avoir le point O comme point multiple d'ordre $n - 1$. Ensuite il faut, lorsqu'on effectuera la réduction de la singularité, que les transformées successives de l'adjointe λ aient comme points multiples d'ordre $r - 1$ les points multiples d'ordre r des transformées successives de f qui *correspondent* au point O de cette dernière courbe.

Il nous reste à voir si, ces conditions étant satisfaites, la transformée de la courbe λ, après la résolution de toutes les singularités, se transformera en une adjointe dans le sens défini au paragraphe précédent. Nous avons donc à montrer que, dans toutes les transformations successives, les courbes transformées de λ

---

[1] Le théorème du reste a été donné par MM. Brill et Nœther dans leur Mémoire fondamental [*Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* (*Math. Annalen*, t. VII)].

satisfont aux conditions d'une adjointe pour tous les *nouveaux* points multiples introduits.

Soit, en employant des coordonnées homogènes,

$$(\alpha) \qquad \frac{x}{YZ} = \frac{y}{ZX} = \frac{z}{XY}$$

la transformation quadratique qui commence la réduction de la singularité O. La courbe f se transformera en F, la courbe λ en Λ, ces courbes étant définies par les équations

$$f(x, y, z) = Z^n F(X, Y, Z),$$
$$\lambda(x, y, z) = Z^{n-1} \Lambda(X, Y, Z);$$

et si m et μ désignent les ordres respectifs de f et λ, F sera d'ordre $2m - n$ et Λ d'ordre $2\mu - n + 1$.

Or, pour F, les points multiples introduits par la transformation sont le point $X = 0$, $Y = 0$ d'ordre m, le point $X = 0$, $Z = 0$ d'ordre $m - n$, le point $Y = 0$, $Z = 0$ d'ordre $m - n$; et pour Λ ces points seront respectivement d'ordre μ, d'ordre $\mu - n + 1$, d'ordre $\mu - n + 1$.

Soit d'abord $\mu \geqq m - 1$, alors λ satisfera en ces points aux conditions d'une adjointe à F. D'ailleurs on a, entre les ordres de Λ et F, la même inégalité qu'entre les ordres de λ et f, puisque de l'inégalité $\mu \geqq m - 1$, on déduit $2\mu - n + 1 \geqq 2m - n - 1$. En continuant la série des transformations, on arrivera donc bien au résultat énoncé.

Dans le cas où $\mu < m - 1$, soit $\mu = m - 1 - \rho$, on ajoutera à l'adjointe primitive une courbe arbitraire de degré ρ. On aura ainsi une courbe composée d'ordre $m - 1$ qui se transformera en une adjointe après les résolutions de toutes les singularités.

13. Il ne sera pas inutile, en terminant ces généralités sur les adjointes, de revenir sur la définition transcendante de ces courbes. On verra comment, par une application convenable du théorème de Nœther, on arrive, presque sans calculs, à donner aux intégrales de première espèce leur forme canonique. Nous montrerons ensuite que *la définition algébrique et la définition transcendante de l'adjointe sont équivalentes.*

Nous avons à chercher les conditions pour que l'intégrale

$$\int \frac{Q(x, y)}{(x-a)^{\alpha} f'_y}\, dx$$

reste finie pour tout point de la courbe f.

Considérons en premier lieu le cas où la courbe f n'a que des points multiples à tangentes distinctes, et soit i l'ordre de l'un de ces points.

Nous avons d'abord à exprimer que pour tout point à distance finie, le quotient $\frac{Q}{(x-a)^{\alpha}}$ reste fini. Si la droite $x=a$ ne passe pas par un point multiple, nous avons vu que ce quotient doit se réduire à un polynôme.

Si la droite $x=a$ passe par un point multiple (a, b) d'ordre i, alors f_y doit contenir $(x-a)^{i-1}$, en facteur, sur l'une quelconque des branches de f passant par ce point, et l'on en conclut immédiatement que $Q(x, y)$ doit admettre le point (a, b) au moins comme point multiple d'ordre i, si $\alpha > 0$. Dans ces conditions, appliquant encore le théorème de Nœther, le quotient $\frac{Q(x, y)}{x-a}$ devra se réduire à un polynôme. On passe ainsi de α à $\alpha-1$, et, finalement, on arrive à une intégrale de la forme

$$\int \frac{Q(x, y)}{f'_y}\, dx,$$

où Q admet alors le point (a, b) comme point multiple d'ordre $i-1$.

La considération des points à l'infini de f permet ensuite facilement de déterminer le degré de $Q(x, y)$. Si l'on suppose, comme il est toujours licite de le faire, que les directions asymptotiques de f sont distinctes entre elles et distinctes des axes, il suffit de faire la perspective

$$X = \frac{1}{x}, \qquad Y = \frac{y}{x}.$$

Aux points à l'infini de f correspondent alors certains points à distance finie $(X=0,\ Y=\alpha)$, et comme on a

$$\frac{Q(x, y)\, dx}{f'_y} = -\frac{Q\left(\frac{1}{X}, \frac{Y}{X}\right) X^{m-3}\, dX}{F'_Y},$$

on en déduit de suite que le degré λ de Q est, au plus, égal à $m-3$.

Il y a lieu de se demander maintenant si, lorsque la courbe a des points singuliers quelconques, les intégrales de première espèce sont encore de la forme

$$\int \frac{Q\,dx}{f'_y},$$

Q étant un polynome de degré $m-3$.

Effectuons la transformation déjà étudiée (α)

$$Z = x, \qquad Y = \frac{x}{y},$$

qui fait correspondre à la courbe f d'ordre m la courbe

$$F(Y, Z) = 0$$

de degré $2m-n$, qui admet $m-n$ asymptotes de la forme $Z = C$. Il s'agit de montrer, comme l'on s'en rend compte immédiatement, que si la courbe F a toutes ses intégrales de première espèce de la forme

$$\int \frac{Q(Y, Z)\,dZ}{F'_Y},$$

Q étant un polynome adjoint de degré $2m-n-3$ au plus, il en sera de même pour la courbe f. Exprimons successivement que le polynome Q admet le point ($Y=0$, $Z=0$) comme point multiple d'ordre $m-n-1$, et qu'il a comme asymptotes les $m-n$ droites ($Z = C$). On en conclut que ce polynome peut se mettre sous l'une et l'autre des deux formes suivantes :

$$Q(Y, Z) = \varphi_{m-n-1}(Y, Z) + \ldots + \varphi_{2m-n-3}(Y, Z),$$
$$Q(Y, Z) = Y^{m-2}\,\psi_{m-n-1}(Z) + Y^{m-3}\,\psi_{m-n}(Z) + \ldots.$$

Ceci posé, on trouve d'abord, en prenant Q sous sa première forme, et en tenant compte de l'équation $f = 0$, la relation

$$\int \frac{Q(Y, Z)\,dZ}{F'_Y} = -\int \frac{Q_1(x, y)}{y^{m-n-1}}\,\frac{dx}{f'_y},$$

dans laquelle on a

$$(1) \qquad Q(Y, Z) = \frac{x^{m-n-1}\,Q_1(x, y)}{y^{2m-n-3}}.$$

D'autre part, en envisageant la seconde forme de Q, on trouve

$$(2) \qquad Q\left(\frac{x}{y}, x\right) = \frac{y^{m-n-1} Q_2(x, y)}{y^{2m-n-3}},$$

Q_2 étant un polynome. Le rapprochement des expressions (1) et (2) de Q montre que $Q_1(x, y)$ doit contenir y^{m-n-1} en facteur, d'où l'on déduit le résultat annoncé : les intégrales de première espèce de f, dans le cas où les points singuliers sont quelconques, sont de la forme

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y},$$

et si, comme on peut le supposer, les points à l'infini de f sont des points singuliers ordinaires, on en conclura comme précédemment que le degré de P est au plus égal à $m - 3$.

Il nous reste à montrer que les deux définitions algébrique et transcendante de l'adjointe sont équivalentes. La même transformation (α) va nous servir pour arriver à ce résultat. Au *point de vue transcendant*, une courbe $\lambda(x, y) = 0$ est une adjointe si, *pour tout point singulier,* l'intégrale

$$\int \frac{\lambda(x, y)\,dx}{f'_y}$$

reste *finie,* en supposant les points singuliers à distance finie. Or on a, en tenant compte de $F = 0$, la relation

$$\frac{\lambda(x, y)\,dx}{f'_y} = -\frac{\Lambda(Y, Z)\,dZ}{Y^{\mu-(m-2)}\,F'_Y}.$$

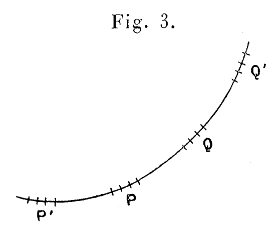
Y n'étant pas nul pour les transformées du point ($x = 0$, $y = 0$), on en conclut, en continuant de proche en proche jusqu'après résolution de toutes les singularités, que la courbe transformée finale de λ jouit bien des propriétés de l'adjointe selon la définition algébrique et qu'il en est par conséquent de même de la courbe λ.

14. Le *théorème du reste,* dû à Brill et Nœther, dont nous aurons à faire un usage fréquent dans le cours de ce Volume, est le suivant :

Soit $f(x, y) = 0$ *une courbe de degré* m, *que nous supposerons d'abord n'avoir que des points doubles, et soit* φ *une*

adjointe d'ordre n. La courbe φ *coupe en général la courbe* f, *en dehors des points doubles, en un certain nombre de points que nous diviserons en deux groupes* P *et* Q. *Cela posé, soient* ψ *et* χ *deux autres adjointes arbitraires d'ordre n, la première passant par* P, *la seconde par* Q; *elles détacheront respectivement sur la courbe* f *des groupes de points* Q' *et* P'.

Fig. 3.



La proposition que nous avons en vue consiste à montrer que *les points* P' *et* Q' *sont sur une même adjointe d'ordre n.*

Envisageons le polynome $\psi\chi$; il s'annule aux points P et Q, et a comme points doubles les points doubles de f. Appliquant alors la remarque fondamentale du n° 8, on en conclut qu'on peut écrire ce polynôme sous la forme

$$(\beta)\qquad \psi\chi = \alpha f + \beta\varphi,$$

et l'on voit de suite que la courbe $\beta = 0$ doit passer par les points doubles; c'est donc une adjointe. D'autre part, elle passe par les points P' et Q', puisque la courbe φ n'y passe pas, et son degré est égal à n, si, comme il arrive en général, les termes de plus haut degré dans f et φ n'ont pas de facteurs communs : la démonstration est ainsi achevée.

Dans le cas où la courbe f a des points multiples à tangentes distinctes, la démonstration précédente s'applique de même. La courbe $\psi\chi$ a en chaque point multiple d'ordre i un point multiple d'ordre $2i - 2 = i + i - 1 - 1$.

La remarque fondamentale du n° 8 s'applique encore et l'on peut écrire la relation (1). Il reste à voir que β a un point multiple d'ordre $i - 1$. Or soit, en groupant les termes homogènes,

$$\begin{aligned} f &= f_i + f_{i+1} + \ldots, \\ \varphi &= \varphi_{i-1} + \varphi_i + \ldots, \\ \alpha &= \alpha_\lambda + \alpha_{\lambda+1} + \ldots, \\ \beta &= \beta_\mu + \beta_{\mu+1} + \ldots, \end{aligned}$$

et supposons, comme il arrive en général, que f_i et φ_{i-1} n'ont pas de facteurs communs : si l'on avait $\mu < i-1$ et $\lambda < i-2$, il faudrait que l'on eût

$$\alpha_\lambda f_i + \beta_\mu \varphi_{i-1} = 0,$$

ce qui est impossible. La conclusion est la même que précédemment.

Il nous reste à considérer le cas où la courbe f a des singularités arbitraires.

Mais nous avons montré qu'une adjointe se transforme en une adjointe après la résolution de toutes les singularités; cela suffit à faire voir que *le théorème du reste subsiste dans les cas les plus généraux*, car on peut remonter du cas des singularités ordinaires aux singularités quelconques.

IV. — Cas des surfaces. Surfaces sous-adjointes. Théorème du reste.

15. Le théorème de Nœther s'étend au cas des surfaces de la manière suivante :

Soient $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z) = 0$ trois surfaces; les axes étant supposés quelconques, il s'agit de trouver les conditions pour que le polynome $f(x, y, z)$ puisse se mettre sous la forme

$$(1) \qquad A\,\varphi(x, y, z) + B\,\psi(x, y, z) = f(x, y, z),$$

A et B étant des polynomes entiers en x, y, z.

Si la représentation (1) est possible, elle le sera pour le cas des courbes d'intersection des surfaces φ, ψ, f par un plan arbitraire.

Réciproquement, supposons que, dans un plan arbitraire $z = z_0$, la représentation soit possible, c'est-à-dire que le polynome $f(x, y, \overline{z_0})$ soit susceptible de se mettre sous la forme

$$A(x, y, z_0)\,\varphi(x, y, z_0) + B(x, y, z_0)\,\psi(x, y, z_0),$$

où A et B sont des polynomes entiers en x et y, mais qui peuvent contenir rationnellement z_0 : on aurait donc une identité

$$(2) \quad R(z_0) f(x, y, z_0) = M(x, y, z_0)\,\varphi(x, y, z_0) + N(x, y, z_0)\,\psi(x, y, z_0),$$

où M, N, R sont maintenant entiers par rapport à z.

Soit $z_0 = \alpha$ une racine de $R(z_0) = 0$, on aura identiquement

$$M(x, y, \alpha)\varphi(x, y, \alpha) + N(x, y, \alpha)\psi(x, y, \alpha) = 0.$$

Or $\varphi(x, y, \alpha)$ et $\psi(x, y, \alpha)$ n'ont pas de facteur commun, car autrement une partie de l'intersection des deux surfaces serait une courbe plane dans le plan $z = \alpha$, ce qui n'est pas, les axes étant arbitraires.

Il faut donc que $N(x, y, \alpha)$ soit de la forme

$$N(x, y, \alpha) = \varphi(x, y, \alpha)\,Q(x, y, \alpha) = \varphi(x, y, z_0)\,Q + (z_0 - \alpha)\,Q_1,$$

en remplaçant α par $z_0 + (\alpha - z_0)$.

Mais on a

$$N(x, y, z_0) = N(x, y, \alpha) + (z_0 - \alpha)\,\lambda(x, y, z_0, \alpha),$$

donc

$$N(x, y, z_0) = \varphi(x, y, z_0)\,Q + (z_0 - \alpha)\,Q_2,$$

Q et Q_2 étant des polynomes en x, y, z_0.

Substituant dans (2), il vient

$$R(z_0)\,f(x, y, z_0) = \varphi(x, y, z_0)\,P + (z_0 - \alpha)\,\psi(x, y, z_0)\,P_1,$$

P et P_1 étant des polynomes en x, y, z_0. De là résulte que P doit être divisible par $z_0 - \alpha$. On peut donc supprimer ainsi successivement tous les facteurs de $R(z_0)$, et l'on aura finalement

$$f(x, y, z_0) = \varphi(x, y, z_0)\,S(x, y, z_0) + \psi(x, y, z_0)\,T(x, y, z_0),$$

S et T étant des polynomes en x, y, z_0 ; et la démonstration est achevée [1].

Appliquant une remarque faite relative aux courbes, on voit que si, en particulier, les surfaces φ et ψ ont une courbe commune qui soit multiple d'ordre q pour φ et d'ordre r pour ψ, et si les deux surfaces n'ont pas de plan tangent commun en un point arbitraire de la ligne multiple, la surface f satisfera aux conditions voulues si cette courbe est pour elle multiple de l'ordre $q + r - 1$.

16. Nous avons défini algébriquement plus haut les courbes

---

[1] Dans son Mémoire déjà cité (*Math. Annalen*, t. VI), M. Nœther étend aux surfaces le théorème relatif aux courbes, mais sa démonstration est entièrement différente de celle que nous venons de donner.

adjointes. Pour les surfaces, il y a lieu de considérer des *adjointes* et des *sous-adjointes* (¹).

Nous nous bornerons pour le moment à la définition des *surfaces sous-adjointes* à une surface donnée $f(x, y, z) = 0$.

Nous dirons qu'une surface $\varphi(x, y, z) = 0$ est *sous-adjointe* à la surface f si une section plane *arbitraire* de $f = 0$ a pour adjointe la section plane correspondante de la surface φ (section par le même plan). Il résulte de cette définition qu'une surface sous-adjointe passe par les lignes multiples de la surface et, en particulier, si ces lignes multiples sont telles qu'en un point arbitraire les plans tangents sont différents, une surface sous-adjointe aura une ligne multiple d'ordre p de la surface comme ligne multiple d'ordre $p - 1$. Relativement aux points multiples isolés, les surfaces sous-adjointes ne sont soumises à aucune condition.

17. *Le théorème du reste* relatif aux courbes *s'applique aussi aux surfaces*. Soit $f(x\, y, z) = 0$ une surface d'ordre m, et soit $\varphi(x, y, z) = 0$ une sous-adjointe d'ordre n. Supposons que cette sous-adjointe coupe la surface f, en dehors des lignes multiples, suivant deux groupes de courbes P et Q. Envisageons deux autres sous-adjointes arbitraires d'ordre n, soient $\psi = 0$ et $\chi = 0$, la première passant par P et la seconde par Q : elles détacheront respectivement sur la surface f deux nouveaux groupes de courbes Q′ et P′; il s'agit de montrer que *les courbes* P′ *et* Q′ *sont sur une même sous-adjointe d'ordre n.*

La démonstration est immédiate. Considérons les trois surfaces $\psi\chi = 0$, $f = 0$, $\varphi = 0$; un plan quelconque, soit $z = z_0$, coupe ces trois surfaces suivant trois courbes, pour lesquelles on peut appliquer le théorème de Nœther; on a alors

$$\psi(x, y, z_0)\,\chi(x, y, z_0) = \alpha(x, y, z_0)\,f(x, y, z_0) + \beta(x, y, z_0)\,\varphi(x, y, z_0),$$

α et β étant *a priori* des polynomes entiers en x et y qui peuvent contenir rationnellement z_0. On montre, comme précédemment, que α et β sont bien des polynomes en z_0, et l'on en conclut que la surface $\beta(x, y, z) = 0$ est une surface, en général d'ordre n,

(¹) Cette distinction paraît avoir été faite pour la première fois d'une manière systématique par M. Enriques.



passant par P′ et Q′, et telle que sa section par les plans $z =$ const. est l'adjointe de la section plane correspondante de la surface f; nous verrons plus tard que s'il en est ainsi, un plan arbitraire coupe encore la surface β suivant une adjointe de la section plane correspondante de f, et le théorème est démontré.

Le théorème du reste s'étend aux *surfaces* dites *adjointes :* nous le montrerons quand nous aurons défini ces surfaces.

CHAPITRE II.

LA GÉOMÉTRIE SUR UNE COURBE ALGÉBRIQUE [1].

I. — Série linéaire de groupes de points sur une courbe plane. Série complète. Somme de deux séries.

1. Soit $f(x, y) = 0$ une courbe plane algébrique irréductible.

Un système linéaire de courbes de dimension r est défini par une relation de la forme

$$(1) \qquad h_0\psi_0 + h_1\psi_1 + \ldots + h_r\psi_r = 0,$$

où les ψ sont des fonctions entières de x, y et les h des constantes arbitraires. Nous supposons que les fonctions ψ sont linéairement indépendantes relativement à f, c'est-à-dire qu'il n'existe pas entre elles de relation linéaire identique de la forme

$$(2) \qquad a_0\psi_0 + a_1\psi_1 + \ldots + a_r\psi_r = \theta f,$$

θ étant un polynome, et les a des constantes.

Les courbes ψ peuvent d'ailleurs passer par des points fixes de la courbe f, et l'on peut supposer que ces points sont simples.

Cela posé, l'équation (1) définit, sur la courbe f, *une série linéaire de groupes de points* g_n^r. Le nombre n des points est le *degré* de la série; r est sa *dimension*.

Le plus souvent, n désigne le nombre des points variables d'intersection. Mais on peut leur adjoindre un certain nombre de points fixes.

Dans tous les cas, on a évidemment la relation

$$n \geqq r.$$

Il est évident que par $r + 1$ points arbitraires de la courbe f,

---

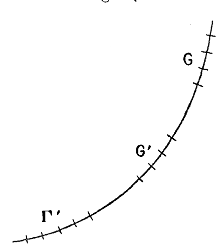
[1] La théorie géométrique des séries linéaires de groupes de points est due à MM. Brill et Nœther (*Math. Annalen,* t. VII). Nous avons utilisé aussi dans notre rédaction un Mémoire de M. Segre (*Annali di Matematica*, t. XXII; 1894) et un Mémoire de M. Bertini (même Volume).

on ne peut faire passer une courbe (1), car il existerait alors entre les fonctions ψ une relation identique (2).

2. Avant d'exposer les propriétés principales des séries linéaires de groupes de points, montrons qu'une série linéaire quelconque g_n^r, définie par le système (1), *peut toujours être obtenue par un système linéaire de courbes adjointes* φ, *à* f, *d'un ordre convenable ne dépendant que d'un groupe de points de la série,* assujetties, s'il est nécessaire, à passer par un certain nombre de points fixes de la courbe f.

Soit G′ un certain groupe de g_n^r, déterminé par une courbe ψ' du système (1). Par G′, faisons passer une adjointe φ', ce qui sera toujours possible, si son ordre est suffisamment élevé.

Fig. 4.



Cette courbe φ' coupera encore f, en dehors des points multiples, en un certain nombre de points, dont l'ensemble Γ′ forme ce qu'on appelle un *résidu*. Soit G un second groupe déterminé par une courbe ψ. Envisageons le produit

$$\psi\varphi',$$

qui s'annule pour G, G′ et Γ′ et qui passe par suite par l'intersection de f et ψ'. On aura donc, en appliquant le théorème de Nœther,

$$\psi\varphi' = \varphi\psi' + \theta f;$$

d'où l'on conclut que φ est une adjointe de même ordre que φ' et qui passe par G et Γ′. On aura donc, sur la courbe f,

$$\psi_i\varphi' = \psi'\varphi_i,$$

d'où

$$\varphi'(h_0\psi_0 + \ldots + h_r\psi_r) = \psi'(h_0\varphi_0 + \ldots + h_r\varphi_r);$$

et, par suite, le système g_n^r, déterminé par (1), est aussi déterminé

par le système linéaire d'adjointes

$$(3) \qquad h_0\varphi_0 + h_1\varphi_1 + \ldots + h_r\varphi_r = 0,$$

dans lequel toutes les courbes φ passent par Γ'.

3. On dit qu'une série $g_n^{r'}$ est *contenue totalement* dans une autre g_n^r lorsque, ayant le même degré n, tout groupe G' de la première est un groupe de la seconde.

Une série linéaire *est normale ou complète* lorsqu'elle n'est pas contenue totalement dans une série de même degré, mais de dimension supérieure.

Lorsqu'une série n'est pas complète, on désigne sous le nom de *défaut* de cette série, la différence entre les dimensions de la série complète et de cette série.

Le théorème fondamental relatif aux séries linéaires est le suivant :

Si une série linéaire n'est pas complète, il existe une série linéaire complète et une seule, de même degré, qui la contient totalement.

En effet, soit G un groupe d'une série g_n^r, toute série linéaire contenant totalement G est déterminée par un système linéaire d'adjointes, assujetties à couper f, en dehors des points multiples, en un certain nombre de points fixes, le résidu Γ considéré plus haut.

Considérons *toutes* les adjointes indépendantes passant par Γ, elles formeront un certain système linéaire de dimension r'

$$(S) \qquad \alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_{r'}\varphi_{r'} = 0,$$

et de degré n. Ce système détermine une série linéaire $g_n^{r'}$ qui *contient nécessairement g_n^r et toutes les séries qui ont avec g_n^r un groupe commun,* d'où l'on conclut immédiatement le théorème énoncé.

De ce qui précède résulte encore qu'un groupe arbitraire de n points détermine complètement une série complète, et que le système linéaire de *toutes* les adjointes d'un ordre donné, assujetties ou non à passer par des points fixes de la courbe f, déterminent sur cette courbe une série complète.



La démonstration précédente nous indique en même temps le procédé qu'il faudra employer pour reconnaître si une série g_n^r déterminée par un système linéaire donné est complète ou non. Il suffira de la comparer à la série déterminée par le système linéaire des adjointes d'un ordre convenable qui passent par le groupe résiduel Γ de points fixes défini plus haut.

Faisons encore la remarque que le système linéaire de toutes les courbes d'un ordre donné ne découpe pas nécessairement sur une courbe donnée une série complète. On s'en rend compte en considérant par exemple la série déterminée sur une courbe par toutes les droites du plan, et appliquant les considérations précédentes.

4. *Si une série complète a des points fixes, la série que l'on obtient en retranchant ces points fixes en partie ou en totalité est encore complète,* car si cette série était contenue totalement dans une autre, en ajoutant à cette deuxième les points retranchés, on obtiendrait une série contenant totalement la série proposée.

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie : *Si, à une série complète, on ajoute des points fixes, la série nouvelle peut n'être pas complète.* Ainsi, soit une courbe d'ordre m sans singularités; toutes les adjointes d'ordre $n < m - 1$ (qui sont des courbes arbitraires d'ordre n) déterminent une série linéaire complète $g_{mn}^{\frac{n(n+3)}{2}}$. Si, à cette série, on ajoute m points fixes en ligne droite, on obtiendra une série $g_{m(n+1)}^{\frac{n(n+3)}{2}}$ qui ne sera pas complète, puisqu'elle est évidemment comprise dans la série $g_{m(n+1)}^{\frac{(n+1)(n+3)}{2}}$, déterminée par toutes les adjointes d'ordre $n + 1 < m$.

5. *Somme de deux séries complètes.* — Soient deux séries complètes $g_{n_1}^{r_1}$, $g_{n_2}^{r_2}$ que nous supposerons d'abord telles que deux groupes généraux n'ont pas de points communs (fixes, par conséquent). Pour définir la somme de ces deux séries, on prend un groupe G_{n_1} de la première, un groupe G_{n_2} de la seconde : ces $n_1 + n_2$ points forment un groupe $G_{n_1+n_2}$ qui *individualise une série complète,* $g_{n_1+n_2}$ qui est appelée la *somme des deux séries.* Elle contient évidemment tous les groupes que l'on peut former

en associant un groupe arbitraire de la première à un groupe arbitraire de la seconde. Nous exprimerons souvent qu'une série complète est la somme de deux autres par l'égalité symbolique

$$g_{n_1+n_2} = (g_{n_1} + g_{n_2}).$$

Le cas où il y a des points communs est un cas limite facile à traiter.

Soit, par exemple, à additionner $(g_n^r + g_{n'}^{r'})$, tous les groupes des séries g_n^r et $g_{n'}^{r'}$ ayant un point commun P nécessairement fixe, il faudra, pour définir cette somme, employer des adjointes tangentes en P à f.

Dans le même ordre d'idées, une série normale définie par le point P compté r fois et par un groupe de points G, sera déterminée par des adjointes passant par G et rencontrant la courbe en r points confondus en P.

6. *Série contenue partiellement dans une autre.* — Soit g_n^r une série linéaire, et G_s un groupe de points $(s < n)$. Ce groupe sera un groupe *partiel* de la série, si G_s est contenu dans un groupe G_n de points appartenant à g_n^r. Il y aura donc au moins un groupe G_{n-s} appartenant à g_n^r et tel que

$$G_n = G_s + G_{n-s}.$$

Il pourra exister une infinité de groupes G_{n-s} : ils formeront une *série linéaire résiduelle de* G_s *par rapport à* g_n^r. On l'obtiendra en prenant toutes les courbes du système

$$(\alpha) \qquad h_0\varphi_0 + \ldots + h_r\varphi_r = 0,$$

définissant g_n^r, qui passent par G_s. Cette série sera *complète* si la première est complète ; son degré sera égal à $n - s$ et sa dimension sera $r - \rho$, en désignant par ρ le nombre de conditions auxquelles doit satisfaire une courbe du système (α) pour passer par les s points du groupe G_s.

7. Étant données deux séries complètes g_n^r et $g_{n'}^{r'}$ $(n' < n)$, si le groupe général $G_{n'}$ de la deuxième est un groupe partiel de la première, on dira que *la série* $g_{n'}^{r'}$ *est contenue partiellement dans la série* g_n^r.



Soit $G_{n'}$ un groupe de $g_{n'}^{r'}$; considérons la série résiduelle de $G_{n'}$ par rapport à g_n^r. Nous allons montrer que *cette série résiduelle* $g_{n-n'}$ *est indépendante de* $G_{n'}$, *c'est-à-dire qu'elle est la même, quel que soit le groupe* $G_{n'}$ *de* $g_{n'}^{r'}$ *dont on est parti.* Cette proposition est une conséquence du théorème du reste. Considérons un groupe de g_n^r

$$G_n = G_{n'} + G_{n-n'},$$

formé de $G_{n'}$ et d'un groupe de $g_{n-n'}$.

Par G_n, faisons passer une adjointe qui coupera encore f en un groupe résiduel Γ. La série g_n^r sera définie par toutes les adjointes passant par Γ; la série $g_{n'}^{r'}$ sera définie par toutes les adjointes passant par Γ et par $G_{n-n'}$; la série $g_{n-n'}$ sera définie par toutes les adjointes passant par Γ et $G_{n'}$. Désignons par $H_{n'}$ un autre groupe de $g_{n'}^{r'}$ et par $G'_{n-n'}$ un groupe arbitraire de $g_{n-n'}$. Il suffira de démontrer que les groupes Γ, $G'_{n-n'}$ et $H_{n'}$ sont sur une même adjointe. Or, Γ, $G_{n-n'}$ et $G_{n'}$ sont sur une même adjointe; il en est de même de Γ, $G_{n-n'}$ et $H_{n'}$, et de Γ, $G'_{n-n'}$ et $G_{n'}$; donc Γ, $G'_{n-n'}$ et $H_{n'}$ sont aussi sur une même adjointe.

II. — Degré et dimension d'une série complète; séries spéciales et non spéciales.

8. Nous nous occuperons en premier lieu du degré et de la dimension des séries complètes déterminées par *toutes* les adjointes d'un ordre donné et qui, par ailleurs, ne sont assujetties à aucune autre condition.

Soit une courbe f d'ordre m (avec d points doubles) : nous remarquerons d'abord que la dimension du *système linéaire* des adjointes d'ordre ν est égale ou supérieure à

$$\frac{\nu(\nu+3)}{2} - d,$$

suivant que les conditions auxquelles la courbe générale du système doit satisfaire pour passer par les points doubles, sont ou ne sont pas indépendantes.

Dans le cas de l'égalité, le système est dit *régulier*.

9. Relativement à la *dimension* r_ν *de la série* des groupes de



points déterminée par le système de toutes les adjointes d'ordre ν sur la courbe f, nous distinguerons deux cas, suivant que ν est plus grand ou inférieur à m.

Si $\nu < m$, il est évident que la dimension de la série sera égale à la dimension du système linéaire des adjointes d'ordre ν; on aura donc

$$r_\nu \geqq \frac{\nu(\nu+3)}{2} - d.$$

Si $\nu \geqq m$, il n'en est plus ainsi, car le système des adjointes contient alors le système linéaire formé par f et toutes les courbes d'ordre $\nu - m$. Le nombre de ces courbes linéairement indépendantes doit évidemment être défalqué et l'on aura dans ce cas la relation

$$r_\nu \geqq \frac{\nu(\nu+3)}{2} - d - \frac{(\nu-m+1)(\nu-m+2)}{2}.$$

Ces deux expressions coïncident pour $\nu = m-1$ et $\nu = m-2$.

Mettons en évidence le nombre $m-3$, et introduisons le nombre

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - d.$$

Pour $\nu = m - 3 + \alpha$ ($\alpha \geqq 1$), on aura la relation

$$r_\nu \geqq p - 2 + m\alpha;$$

pour $\nu = m - 3 - \alpha$ ($\alpha \geqq 0$), on aura la relation

$$r_\nu \geqq p - 1 - m\alpha + \frac{\alpha(\alpha+3)}{2}.$$

10. Quant au *degré* n_ν *de la série,* il est égal à $m\nu - 2d$. Donc, pour $\nu = m - 3 + \alpha$, on a

$$n_\nu = 2p - 2 + m\alpha,$$

et, par suite,

$$n_\nu - r_\nu \leqq p,$$

et pour $\nu = m - 3 - \alpha$, on a

$$n_\nu = 2p - 2 - m\alpha$$

et

$$n_\nu - r_\nu \leqq p - 1 - \frac{\alpha(\alpha+3)}{2}.$$

11. Soit maintenant une série complète quelconque g_n^r. Nous savons qu'on peut la considérer comme déterminée par un système linéaire de courbes adjointes φ_ν passant par un groupe fixe Γ sur f. Soit $g_{n_\nu}^{r_\nu}$ la série complète déterminée par *toutes* ces adjointes d'ordre ν; en assujettissant celles-ci à passer par Γ, n_ν sera évidemment diminué du nombre λ des points de Γ, et r_ν sera diminué de ce nombre ou d'un nombre moindre, suivant que les conditions imposées par le passage des adjointes en ces λ points seront ou ne seront pas indépendantes. On aura donc les relations

$$n = n_\nu - \lambda,$$
$$r = r_\nu - \lambda + \varepsilon \qquad (\varepsilon \geqq 0),$$

et, par suite,

$$n - r \leqq n_\nu - r_\nu.$$

On en conclut encore que, pour les séries déterminées par des adjointes d'ordre supérieur à $m - 3$, on a

$$n - r \leqq p, \tag{1}$$

et, pour les séries déterminées par des adjointes d'ordre inférieur ou égal à $m - 3$,

$$n - r \leqq p - 1. \tag{2}$$

12. Parmi les séries de groupes de points, il y a lieu de distinguer celles qu'on peut obtenir au moyen d'un système d'adjointes d'ordre $m - 3$; elles portent le nom de *séries spéciales;* dans le cas contraire, une *série est non spéciale.*

La série *canonique* est la série spéciale déterminée par *toutes* les adjointes d'ordre $m - 3$ [1].

Le degré d'une série spéciale est inférieur ou égal à $2p - 2$, et une série dont le degré surpasse $2p - 2$ est certainement non spéciale.

Nous allons démontrer sur les séries spéciales deux théorèmes fondamentaux d'où nous déduirons ensuite quelques conséquences importantes.

---

[1] Une série, qui peut être déterminée par des adjointes d'ordre $m - 3 - \alpha$ inférieur à $m - 3$, est spéciale, puisque l'on peut adjoindre à ces adjointes une courbe fixe arbitraire d'ordre α. De sorte que les séries non spéciales sont celles qui ne peuvent être déterminées que par des adjointes d'ordre supérieur à $m - 3$.

13. Soit g_n^r une série spéciale complète, et soit P un point fixe de f n'appartenant pas à toutes les φ_{m-3} qui déterminent un groupe G_n de la série. Le premier théorème que nous avons en vue est le suivant :

La série complète somme du point P *et de* g_n^r *est de dimension* r, *et* non *de dimension supérieure.*

Pour le démontrer, menons par le point P une droite quelconque L qui coupe f en $m-1$ autres points α. Par P et par un groupe G_n de la série, on peut faire passer une φ_{m-2}, formée d'une φ_{m-3} passant par G_n et de la droite L; d'ailleurs l'adjointe φ_{m-3} rencontrera f en dehors de G_n en des points β qui, par hypothèse, ne comprennent pas P. La série complète somme de P et de g_n^r s'obtiendra au moyen de toutes les adjointes d'ordre $m-2$ passant par les points α et β. Or, ces adjointes d'ordre $m-2$ ayant $m-1$ points α sur L, contiendront cette droite, et il ne restera à considérer que les adjointes d'ordre $m-3$ qui déterminent précisément la série g_n^r complète. La série complète somme de P et de g_n^r est donc bien de dimension r et non de dimension supérieure.

Symboliquement, nous pouvons donc écrire

$$g_{n+1}^r = (g_n^r + \mathrm{P}).$$

On doit remarquer que si P appartenait aux points β, les φ_{m-2} se décomposeraient bien encore en la droite L et en les adjointes φ_{m-3}, mais celles-ci ne seraient plus assujetties à passer par P; donc la dimension de $(\mathrm{P} + g_n^r)$ serait supérieure à r.

14. Nous avons vu que si la série complète g_n^r était spéciale, on avait $n - r \leqq p - 1$ (nº 11). Le second théorème fondamental sur les séries spéciales est en quelque sorte la réciproque de cette proposition. Son énoncé est le suivant :

Soit g_n^r *une série quelconque* (*complète ou non*), *si l'on a*

$$n - r \leqq p - 1,$$

la série est spéciale.

Il suffit évidemment de supposer que la série est complète. Soit donc g_n^r une série complète pour laquelle $n - r \leqq p - 1$. Suppo-



sons que le théorème soit démontré pour les séries de groupes de moins de n points. Prenons un groupe G de g_n^r, et soit P un de ses points *non commun à tous les groupes formant* g_n^r; désignons par α les autres points de G. Ces points α déterminent une série complète g_{n-1}^{r-1} de degré $n-1$ et de dimension $r-1$, et, par hypothèse, cette série sera spéciale puisque

$$(n-1)-(r-1) \leqq p-1.$$

Cela posé, si les adjointes d'ordre $m-3$, passant par les points α, ne passaient pas par P, la série normale somme de P et de g_{n-1}^{r-1} qui est g_n^r serait de dimension $r-1$ seulement, en vertu du premier théorème, ce qui est contraire à l'hypothèse. Par suite, le groupe G est sur une adjointe d'ordre $m-3$ et le théorème est démontré.

15. Voici quelques conséquences importantes des théorèmes précédents :

La série canonique a la dimension $p-1$. — Cette dimension est tout d'abord au moins égale à $p-1$ [n° **11**, inégalité (2)]. Supposons qu'elle surpasse ce nombre. Il existera alors une série spéciale $g_{2p-2}^{p+\varepsilon}$ ($\varepsilon \geqq 0$). En lui adjoignant un point fixe, on aurait, en vertu du premier théorème, une série $g_{2p-1}^{p+\varepsilon}$; celle-ci serait spéciale, en vertu du second théorème, puisque l'on a

$$2p-1-p-\varepsilon \leqq p-1,$$

ce qui est impossible, puisque son degré est $2p-1$.

Il n'y a pas d'autre série g_{2p-2}^{p-1} *que la série canonique*. — En effet, une telle série satisfaisant à l'inégalité

$$(2p-2)-(p-1) \leqq p-1,$$

est spéciale; elle doit donc être contenue dans la série canonique, et, par suite, coïncider avec elle, puisqu'elle est de la même dimension.

La série canonique n'a pas de points fixes. — Supposons en effet que cette série ait un point fixe A sur f. En retranchant A, on aurait une série g_{2p-3}^{p-1}, et, en adjoignant alors à cette dernière

un point arbitraire P, on obtiendrait une série g_{2p-2}^{p-1} distincte de la série canonique, puisque tous ses groupes ne contiennent pas A, ce qui est impossible.

Remarquons d'ailleurs que les φ_{m-3} qui déterminent la série canonique peuvent avoir des points communs fixes en dehors de f: telles sont, par exemple, les φ_{m-3} d'une courbe du *sixième ordre* avec *huit* points doubles.

Pour une série complète non spéciale, on a $n - r = p$. — On a, en effet, dans ce cas (n° **11**),

$$n - r \leqq p.$$

Si donc $n - r$ était inférieur à p, il serait égal à $p - 1$ au moins et la série serait spéciale. Comme exemple, la série non spéciale $g_{2p-2+m\alpha}^{r}$ déterminée par *toutes* les adjointes d'ordre $m - 3 + \alpha$ ($\alpha \geqq 1$) a pour dimension $r = p - 2 + m\alpha$.

16. Voici encore une conséquence importante relative au *genre d'une courbe algébrique irréductible*. Pour une courbe ayant seulement des points multiples à tangentes distinctes d'ordre i, le genre p a pour expression

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \sum \frac{i(i-1)}{2}.$$

Lorsqu'il s'agit d'une courbe ayant des singularités quelconques, son genre p est, par définition, celui d'une courbe n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes à laquelle elle correspond par la succession étudiée de transformations quadratiques. Mais, pour que cette définition soit acceptable, il faut être assuré que *les genres* p *et* p' *de deux courbes à singularités ordinaires* (pour lesquelles par suite ces nombres sont définis) *sont égaux, si les courbes se correspondent point par point*. Pour établir ce théorème fondamental, il suffit de considérer sur la première courbe une série complète non spéciale g_n^r et dont tous les points sont mobiles.

Nous prendrons n supérieur à $2p - 2$ et à $2p' - 2$; à cette série correspondra sur la deuxième courbe une série $g_n'^r$, non spéciale et complète. D'où l'on conclut

$$n - r = p, \qquad n - r = p',$$



et, par suite,

$$p = p'.$$

Remarquons encore que, lorsque des courbes se correspondent point par point, *une série spéciale complète g_n^r se transforme en une série spéciale.*

On a, en effet, sur la première courbe,

$$n - r \leqq p - 1;$$

donc aussi sur la seconde. Ainsi *la série canonique se transforme en une série canonique.*

III. — Théorème de Riemann-Roch [1].

17. On connaît le *théorème de Riemann-Roch* relatif au nombre des constantes arbitraires dont dépendent les fonctions rationnelles qui ont comme pôles simples n points donnés sur une courbe algébrique.

Considéré au point de vue de l'étude des séries linéaires de groupes de points, ce théorème s'énonce de la manière suivante :

Si g_n^r est une série complète, la différence $\mu = p + r - n$, où p désigne le genre de la courbe f, est égale au nombre des adjointes d'ordre $m - 3$ linéairement indépendantes passant par un groupe de la série.

Le théorème est évident dans le cas des séries complètes *non spéciales.*

Envisageons donc le cas d'*une série spéciale.* Cette série g_n^r est alors comprise partiellement dans la série canonique g_{2p-2}^{p-1}. Il existe par suite une série résiduelle $g_{2p-2-n}^{r'}$ de g_n^r par rapport à g_{2p-2}^{p-1}, et le nombre r' est égal, d'après ce que nous avons vu, au nombre μ des adjointes φ_{m-3} linéairement indépendantes passant par un groupe de g_n^r, diminué d'une unité. Soit

$$r' = \mu - 1.$$

---

[1] Nous étudions ici le théorème de Riemann-Roch sous sa forme géométrique, dans l'ordre d'idées de Brill et Nœther.

Or, par un groupe G de g_n^r et par r' points arbitraires de f (mais non par $r'+1$), on peut faire passer une φ_{m-3}. Appliquons successivement le théorème du n° 13. Soient P_1, P_2, ..., P_r, les points arbitrairement choisis; la série

$$(g_n^r + P_1) = g_{n+1}^r$$

est complète, d'ordre $n+1$, de dimension r, et de plus elle est *spéciale*.

Il en est de même de la série

$$(g_{n+1}^r + P_2) = g_{n+2}^r.$$

Finalement, on arrivera ainsi à une série $g_{n+r'+1}^r$ qui sera encore complète, mais ne sera plus spéciale, d'où l'on conclut l'égalité

$$n+r'+1-r=p,$$

et, en tenant compte de l'égalité précédente $r'=\mu-1$,

$$n-r=p-\mu,$$

ce qu'il fallait démontrer.

On donne souvent au nombre μ le nom d'*indice de spécialité* de la série g_n^r.

18. La *loi de réciprocité de Brill et Nœther* se conclut immédiatement de ce qui précède. On considère deux séries

$$g_n^r, \quad g_{n'}^{r'} \qquad (n+n'=2p-2),$$

résiduelles l'une de l'autre par rapport à la série canonique; des égalités

$$n-r=p-\mu,$$
$$r'=\mu-1,$$

on déduit

$$n+r'-r=p-1,$$

d'où

$$2(r'-r)=n'-n.$$

19. Il ne sera pas inutile de montrer comment on peut, de la forme géométrique que nous venons de donner au théorème de Riemann-Roch, passer à la forme analytique rappelée au début.

Soit donc $R(x, y)$ la fonction rationnelle la plus générale ayant n infinis simples en des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de la courbe f. Nous remarquerons d'abord que cette fonction dépend *linéairement* de constantes arbitraires, car, en désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les abscisses des A, le produit

$$(x - a_1) \ldots (x - a_n) R(x, y),$$

qui doit rester fini à distance finie, sera de la forme

$$\frac{P(x, y)}{(x - b_1) \ldots (x - b_d)},$$

$b_1, b_2, \ldots, b_d$ étant les abscisses des points doubles, le polynome $P(x, y)$ s'annulant aux points de rencontre des droites $x = b$ avec la courbe f, et son degré étant déterminé par la condition que R reste aussi finie à l'infini : toutes ces conditions s'expriment par des relations linéaires et homogènes.

Cela posé, envisageons l'équation $R(x, y) = \alpha$, où α est un paramètre variable, et où R est maintenant une fonction rationnelle déterminée devenant infinie en $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Cette équation définit une série linéaire g_n^1, dont un groupe particulier est le groupe $A_1, A_2, \ldots, A_n$ qui correspond à la valeur $\alpha = \infty$. Si cette série n'est pas complète, elle sera contenue dans une série g_n^r complète qui sera définie par un système linéaire d'adjointes

$$h_0 \varphi_0 + \ldots + h_r \varphi_r = 0,$$

en désignant par φ_0 une adjointe s'annulant en $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Par suite, la fonction rationnelle

$$h_0 + h_1 \frac{\varphi_1}{\varphi_0} + \ldots + h_r \frac{\varphi_r}{\varphi_0}$$

est l'expression générale des fonctions ayant les infinis simples A_1, $A_2, \ldots, A_n$. Et c'est la fonction la plus générale jouissant de cette propriété, car, autrement, cette fonction plus générale définirait un groupe d'ordre n, contenant $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et de dimension supérieure à r. Ce nombre r est donné par la relation

$$n - r = p - \mu,$$

et, par suite, le nombre des constantes figurant dans l'expression

cherchée est

$$n - p + \mu + 1.$$

C'est l'*expression analytique* du théorème de Riemann-Roch.

IV. — Des courbes normales.

20. La théorie des séries linéaires de groupes de points sur une courbe plane trouve son application dans l'étude des courbes algébriques dans un espace à un nombre quelconque de dimensions. Après avoir défini ce qu'on entend par *courbe normale,* nous allons montrer, en effet, que cette notion n'est autre que celle d'une *série linéaire normale ou complète*.

21. Commençons par rappeler quelques généralités sur les espaces à n dimensions, qui se trouvent déjà développées au Chapitre IV du premier Volume de cet Ouvrage.

Nous avons vu que dans un espace à n dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, un espace à r dimensions était défini par $n - r$ relations linéaires distinctes

$$U_1 = 0, \quad \ldots, \quad U_{n-r} = 0;$$

puis généralisant la notion de perspective d'un point, nous avons montré comment, en prenant comme *point de vue* un espace S_r, on pouvait projeter un point A sur un espace S_{n-r-1}, en prenant l'intersection de ce dernier avec un espace S_{r+1} passant par A et S_r.

22. Rappelons encore que dans l'espace à n dimensions, une courbe est une multiplicité à *une* dimension, qu'on peut définir en disant que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des fonctions *algébriques* d'un paramètre. Or, d'après un théorème élémentaire d'algèbre, un nombre quelconque d'irrationnelles algébriques s'exprime rationnellement à l'aide d'une seule. On en déduit que, pour une courbe, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peuvent être regardées comme des fonctions rationnelles de deux variables x et y liées entre elles par la relation algébrique $f(x, y) = 0$, et cela de telle manière qu'à un point arbitraire $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la courbe ne corresponde qu'un point (x, y).

Dans cette théorie, quand on parle d'une courbe dans un espace d'ordre n, il est entendu que cette courbe n'est pas contenue



dans un espace linéaire d'ordre moindre, c'est-à-dire qu'il n'y a pas entre les x de relation identique de la forme

$$A_0 + A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n = 0,$$

les A étant des constantes, et en vertu de la relation $f(x, y) = 0$.

Enfin, le degré d'une courbe est le nombre des points de rencontre de cette courbe avec un hyperplan arbitraire.

Ces notions préliminaires conduisent de suite à quelques remarques intéressantes (1).

On voit d'abord qu'*une courbe d'ordre n est toujours contenue dans un espace à n dimensions ou dans un espace moindre,* car si elle est dans un espace de dimension supérieure, par $n+1$ points de la courbe, on pourra mener un hyperplan qui devra la contenir. On peut donc abaisser le nombre des dimensions jusqu'à n.

Une courbe d'ordre n dans un espace à k dimensions (et non moins) correspond point par point à une courbe d'ordre $n-k+2$ située dans un plan. On le voit immédiatement pour $k=3$ en faisant une perspective avec le point de vue sur la courbe. Le procédé est général : dans l'espace à k dimensions, en projetant la courbe sur un espace d'ordre $k-1$, on obtient une courbe d'ordre $n-1$, et en continuant ainsi de proche en proche, on arrive finalement à une courbe d'ordre $n-k+2$ sur un plan.

Une courbe d'ordre n dans un espace d'ordre n (et non d'ordre moindre) est unicursale, puisqu'un hyperplan passant par $n-1$ de ses points n'a avec elle qu'un point de rencontre.

23. Définissons maintenant ce qu'on entend par *courbe normale*. Une courbe algébrique dans un espace $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ d'ordre r est *normale,* si elle n'est pas la perspective sur cet espace d'une courbe du même degré, contenue dans un espace d'ordre supérieur $(x_1, x_2, \ldots, x_{r'})$, $(r' > r)$.

Soient

$$(C) \qquad f(x, y) = 0, \qquad x_1 = \frac{\psi_1(x, y)}{\psi_0(x, y)}, \qquad \ldots, \qquad x_r = \frac{\psi_r(x, y)}{\psi_0(x, y)}$$

(1) Les questions qui nous occupent ici trouvent leur origine dans un petit Mémoire de Clifford [*On the classification of loci* (*Philosophical Trans.*, 1878)].

les équations de cette courbe qu'on suppose ne pas être contenue dans un espace à dimensions moindres, c'est-à-dire que l'on n'a pas entre les ψ de relations identiques telles que

$$\alpha_0\psi_0 + \alpha_1\psi_1 + \ldots + \alpha_r\psi_r = 0 f,$$

les α étant des constantes. Si n désigne le degré de cette courbe, il résulte de ce que nous avons dit que ce degré sera déterminé par le nombre des points d'intersection de l'hyperplan

$$h_0 + h_1 x_1 + \ldots + h_r x_r = 0$$

avec la courbe. Ce nombre est donc précisément égal au *degré* de la série linéaire de groupes de points déterminée, sur la courbe $f = 0$, par le système linéaire

$$(\alpha) \qquad h_0\psi_0 + h_1\psi_1 + \ldots + h_r\psi_r = 0.$$

Si la courbe (C) n'est pas normale, cette série g_n^r ne sera pas complète. En effet, s'il existe une courbe de *même* degré n, contenue dans un espace à r' ($r' > r$) dimensions et dont la courbe donnée soit la perspective, on peut toujours faire en sorte, par une série de transformations homographiques convenables, que la courbe (C) soit la perspective, sur l'espace $x_{r+1} = 0, \ldots, x_{r'} = 0$, d'une courbe (C') dans l'espace ($x_1, x_2, \ldots, x_{r'}$), en prenant comme point de vue l'espace $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_r = 0$, $U = 0$, où $U = 0$ désigne l'équation d'un hyperplan, qu'on pourrait réduire à $x_{r'+1} = 0$, $x_{r'+1}$ étant la variable d'homogénéité. Dans ces conditions, les équations de la courbe (C') s'obtiendront en adjoignant aux équations (C) des relations telles que

$$x_{r+1} = \frac{\psi_{r+1}}{\psi_0}, \qquad \ldots, \qquad x_{r'} = \frac{\psi_{r'}}{\psi_0},$$

d'où l'on conclut immédiatement qu'on peut former sur f une série linéaire $g_n^{r'}$ de même degré que la première et la contenant totalement : la série g_n^r n'est donc pas complète.

Réciproquement, on verrait de suite, sans qu'il soit besoin d'insister, que si la série g_n^r n'est pas complète, la courbe (C) n'est pas normale.

Ainsi donc ces deux notions de *courbe normale* et de *série normale* se ramènent l'une à l'autre.



24. Comme application des considérations précédentes, proposons-nous la question de savoir *si une courbe plane* $f(x, y) = 0$ *est normale on non,* c'est-à-dire si elle peut être considérée, ou non, comme la perspective d'une courbe gauche du *même degré* de l'espace à trois dimensions. Les équations de cette courbe gauche peuvent se mettre sous la forme

$$(\Gamma) \qquad f(x,y) = 0, \qquad z = \frac{\psi_1(x, y)}{\psi_0(x, y)};$$

et si n est le degré de f, et par suite de (Γ), le système linéaire

$$(\beta) \qquad h_0 x\psi_0 + h_1 y\psi_0 + h_2\psi_1 + h_3\psi_0 = 0$$

définira sur f une série linéaire g_n^3. La question revient donc à savoir s'il y a sur la courbe f une série linéaire de dimension 3 et de degré n. D'autre part le système précédent (β) contient le système

$$(\gamma) \qquad h_0 x + h_1 y + h_3 = 0$$

formé de toutes les droites du plan, qui définit sur f une g_n^2. Tout revient finalement à reconnaître si cette série est complète ou non. On appliquera, dans chaque cas, le procédé indiqué plus haut (n° 3).

On peut faire la remarque générale que si la courbe f a au plus $n-3$ points doubles, elle est *normale*. En effet, par n points en ligne droite A faisons passer une adjointe d'ordre $n-2$ formée de la droite A, de d droites passant par les d points doubles, et de $n-3-d$ droites arbitraires $(n-3 \geq d)$. Nous avons à considérer ensuite le système linéaire de toutes les adjointes d'ordre $n-2$ qui passent par le résidu Γ formé de tous les points où toutes ces droites, non compris la droite A, rencontrent la courbe f. Or chacune de ces droites a $n-1$ points communs au moins avec cette adjointe, donc elle en fait partie, et par suite, il ne reste qu'*une* droite mobile arbitraire. On retombe sur le système considéré g_n^2 qui est, par suite, complet.

25. Nous venons de donner un exemple $(n-3 \geq d)$ où la courbe est nécessairement normale. Nous allons maintenant exa-

miner un cas où la courbe *n'est pas normale*. C'est le cas où le nombre des points doubles d est supérieur à $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$.

Une courbe gauche, dont f est la projection, a ses équations de la forme

$$(\Gamma) \qquad f(x,y)=0, \qquad z=\frac{u(x,y)}{v(x,y)}.$$

Il suffit de montrer qu'on peut disposer de u et v de manière que cette courbe soit une courbe *gauche* de degré n. Prenons pour $v=0$ une adjointe d'ordre $n-2$, et pour u une adjointe d'ordre $n-1$ passant par les points de rencontre simples de v et de f. Ces derniers sont en nombre $n^2-2n-2d$ et le nombre des arbitraires dans u est donc égal à

$$d-\frac{n^2-5n+2}{2}.$$

Si ce nombre est supérieur à *deux*, c'est-à-dire si

$$d>\frac{n^2-5n+2}{2}+2=\frac{(n-2)(n-3)}{2},$$

on pourra prendre pour u une fonction qui ne soit pas de la forme $v(\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C})$, et l'on est assuré alors que la courbe (Γ) est *gauche* : car $\frac{u}{v}$ n'est pas un polynome en (x,y) pour x et y arbitraires; et il ne peut l'être non plus pour (x,y) sur f, car f est irréductible et, par suite, on ne peut avoir $u=v(\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C})$ pour tous les points de f, sans que ceci ait lieu identiquement.

D'autre part, la courbe précédente est bien de degré n, comme on le voit en la coupant par le plan $\alpha x+\beta y+z+\gamma=0$: le degré est égal au nombre des points de rencontre variables des deux courbes $f=0$, $(\alpha x+\beta y+\gamma)v+u=0$, et comme u et v ont, en commun avec f, $n(n-3)-2d+2d=n(n-3)$ points, le degré sera égal à $n(n-2)-n(n-3)=n$.

Comme application, on voit qu'une cubique plane qui n'a pas de points doubles est normale; et qu'elle n'est pas normale si elle a un point double.

V. — Série linéaire de groupes de points sur une courbe gauche. Série déterminée sur une courbe gauche par toutes les surfaces d'un ordre donné.

26. Les séries linéaires de groupes de points que nous avons envisagées jusqu'à présent sont relatives à des courbes planes. Ces notions s'étendent immédiatement au cas des courbes gauches ou, plus généralement, des courbes dans un espace à n dimensions.

Soit, par exemple, dans un espace S_n, la courbe définie par

$$f(x, y) = 0, \qquad x_1 = \frac{\psi_1(x, y)}{\psi_0(x, y)}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{\psi_n(x, y)}{\psi_0(x, y)}.$$

Le système linéaire des surfaces

$$(1) \qquad h_0 F_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + h_r F_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

détermine sur cette courbe une série linéaire de groupes de points à laquelle correspond, point par point, une série linéaire sur la courbe f, dans le plan (x, y).

L'étude de l'une revient à l'étude de l'autre ; d'où l'on conclut, sans qu'il soit besoin d'insister, la signification qu'il faut attribuer à ces expressions de *série complète, régulière, spéciale,* etc., lorsqu'il s'agit d'une série linéaire sur une courbe gauche. Ainsi l'étude d'une série linéaire sur une courbe gauche revient à l'étude de la série correspondante sur la perspective de la courbe sur un plan arbitraire.

La dimension de la série sera égale à la dimension du système des surfaces (1), si, parmi ces surfaces, il n'en existe aucune passant par la courbe : cette condition est l'analogue de celle que nous avons exprimée, pour les courbes planes, en disant que les fonctions ψ du système linéaire de courbes étaient linéairement indépendantes, relativement à la courbe considérée f.

27. Nous nous bornerons, dans ce qui va suivre, au cas d'une courbe gauche dans l'espace à trois dimensions. Soit C une telle courbe de degré n et de genre p. Nous nous proposons d'étudier *la série linéaire déterminée par le système linéaire formé par l'ensemble de toutes les surfaces d'ordre k.* Elles déterminent

une série de groupes g_{nk}, et la dimension r_k de cette série serait connue si l'on connaissait le nombre des conditions exprimant qu'une surface de degré k passe par la courbe, ce nombre étant évidemment égal à $r_k + 1$. Nous avons déjà traité ce problème dans le premier Volume (Chap. VIII). Nous croyons devoir revenir sur ces considérations, en nous plaçant plus particulièrement au point de vue de la théorie des séries linéaires de groupes de points, ce qui nous conduira à quelques conclusions importantes ([1]).

28. Voici d'abord une définition qui nous sera utile : Nous dirons que ν points sont *indépendants*, sur la courbe C, *par rapport aux surfaces de degré* k, S_k, si l'on peut faire passer par $\nu - 1$ quelconques d'entre eux une surface S_k, qui ne passe pas par le $\nu^{\text{ième}}$.

Envisageons alors un groupe G_n de n points, obtenu en coupant la courbe C par un plan arbitraire. Parmi les points de G_n, il y en aura un nombre *maximum* ν_k qui seront indépendants par rapport à une S_k, tel par conséquent que le passage d'une S_k par ν_k points quelconques de G_n entraîne son passage par les $n - \nu_k$ autres, mais qu'on puisse par $\nu_k - 1$ points ou un nombre moindre faire passer une S_k ne passant pas par les autres points du groupe.

Ce nombre ν_k est évidemment compris entre o et n.

Si $2k + 1 < n$, on aura

$$\nu_k \geqq 2k + 1,$$

car on peut faire passer k plans par k groupes de deux points pris dans G_n, et qui ne passeront pas par les autres points du groupe si la courbe n'est pas plane. On aura ainsi une S_k passant par $2k$ points du groupe sans passer par les autres; donc $\nu_k - 1 \geqq 2k$.

Si $2k + 1 \geqq n$, on aura

$$\nu_k = n;$$

cela est évident d'après ce qui précède.

29. Ces remarques faites, nous allons commencer par chercher

([1]) La méthode que nous suivons dans cette section est empruntée à un élégant Mémoire de M. Castelnuovo, *Sui multipli di una serie lineare* (*Rend. di Palermo,* t. VII).



une relation entre r_k et r_{k-1}. Dans ce but, considérons la série résiduelle de G_n par rapport à $g_{kn}^{r_k}$: elle aura la dimension $r_k - \nu_k$, puisque le fait pour une S_k de passer par G_n vaut précisément ν_k conditions. Mais la série résiduelle considérée contient évidemment la série $g_{(k-1)n}^{r_{k-1}}$ ou coïncide avec elle ; on aura donc

$$r_k - \nu_k \geqq r_{k-1},$$

et par suite

$$(1) \qquad r_k - r_{k-1} \geqq 2k + 1, \qquad \text{si} \qquad k < \frac{n-1}{2},$$

$$(2) \qquad r_k - r_{k-1} \geqq n, \qquad \text{si} \qquad k \geqq \frac{n-1}{2}.$$

30. Proposons-nous maintenant de trouver une *valeur limite de k à partir de laquelle on soit assuré que la série* $g_{nk}^{r_k}$ *n'est pas spéciale*. Nous en déduirons un résultat extrêmement intéressant relatif au *maximum du genre p d'une courbe gauche de degré n*.

Considérons toutes les valeurs de k jusqu'à l'entier χ immédiatement inférieur à $\frac{n-1}{2}$ et satisfaisant par suite aux inégalités

$$\frac{n-1}{2} - 1 \leqq \chi < \frac{n-1}{2}.$$

Ce nombre χ est le nombre cherché. Nous allons montrer, en effet, que la série découpée sur C par les surfaces de degré χ n'est pas spéciale. On a

$$\nu_\chi \geqq 2\chi + 1 \geqq n - 2.$$

Supposons que la série $g_{n\chi}^{r_\chi}$ soit spéciale. Projetons la courbe C sur un plan en prenant comme point de vue un point A de cette courbe. Nous aurons une courbe C′ d'ordre $n-1$ et sur cette courbe une série $g_{n\chi}^{\prime r_\chi}$, projection de la série considérée qui devrait être spéciale. Une droite D arbitraire du plan détermine avec le point A un plan qui coupe C suivant une G_n qui a ν_χ points indépendants. Donc, un groupe au moins de la série g' pourrait contenir $\nu_\chi - 1$ points de C′ pris sur la droite D sans contenir les autres points de rencontre. La chose est impossible si la série est spéciale, puisque $\nu_\chi - 1$ est au moins égal à $n-3$, et qu'une

adjointe d'ordre $(n-1)-3$ qui passe par $n-3$ points en ligne droite doit contenir la droite. La série $g_{n\chi}^{r_\chi}$ *n'est donc pas spéciale*.

31. Appliquons le théorème de Riemann-Roch. La série peut ne pas être *complète;* désignons par $d_\chi \geqq 0$ son *défaut*. On a, puisque la série n'est pas spéciale,

$$r_\chi = \chi n - p - d_\chi.$$

D'autre part, écrivons toutes les inégalités (1) depuis la valeur $r_1 = 3$ jusqu'à r_χ et ajoutons-les; on trouve

$$r_\chi \geqq \chi(\chi+1)+\chi,$$

donc

$$d_\chi \leqq \chi(n-2-\chi)-p,$$

d'où la conclusion que nous avions en vue, puisque $d_\chi \geqq 0$; *un maximum du genre p d'une courbe gauche de degré n* est donné par la relation

$$p \leqq \chi(n-2-\chi).$$

Ce remarquable résultat est dû à M. Castelnuovo (Mémoire cité).

32. Il est intéressant de comparer ce résultat avec un théorème obtenu par Halphen. Celui-ci a établi ([1]) que le nombre maximum des points doubles apparents d'une courbe gauche de degré n, *sans points singuliers,* est le plus grand entier contenu dans $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$. Comparons ces deux résultats : soit h le nombre des points doubles apparents de la courbe C, supposée sans points singuliers. On a alors

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h,$$

donc

$$h \geqq \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \chi(n-2-\chi).$$

Si $n = 2\lambda + 1$, on a

$$\chi = \lambda - 1,$$

([1]) HALPHEN, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques* (*Journ. de l'École Polytechnique,* 1882).

et

$$h \geqq \lambda(2\lambda - 1) - (\lambda - 1)\lambda = \lambda^2 = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2;$$

les résultats sont identiques.

Si $n = 2\lambda$, on a encore

$$\chi = \lambda - 1,$$

et

$$h \geqq \lambda(\lambda - 1) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Le théorème d'Halphen se trouve établi et est donc compris, comme cas particulier, dans le résultat obtenu par M. Castelnuovo.

On peut remarquer que le minimum de h (ou le maximum de p) peut être atteint. Si $n = 2\lambda$, il suffit, pour le voir, de considérer une surface du second degré et une surface d'ordre λ. Le nombre des points doubles apparents de la courbe d'intersection étant, dans le cas général, donné par la formule connue

$$h = \frac{\mu\nu(\mu - 1)(\nu - 1)}{2},$$

on aura, pour $\nu = 2$,

$$h = \lambda(\lambda - 1).$$

Si $n = 2\lambda + 1$, on considère une quadrique et une surface de degré $\lambda + 1$ passant par une droite de la quadrique. Il y a, en dehors de la droite, une courbe d'intersection de degré $2\lambda + 1$: appliquant alors la formule

$$2(h - h') = (m - m')(\mu - 1)(\nu - 1)$$

relative aux deux courbes d'intersection des surfaces S_μ, S_ν, d'ordres m et m' $(m + m' = \mu\nu)$, ayant respectivement h et h' points doubles apparents, on trouve, en faisant $h' = 0$, $m' = 1$, $\mu = \lambda + 1$, $\nu = 2$,

$$h = \lambda^2.$$

La réciproque est vraie; pour toute courbe gauche sans point double, ayant le minimum du nombre des points doubles apparents, on peut faire passer une surface du second degré (*voir* Halphen, *loc. cit.*), mais la démonstration de ce beau théorème nous entraînerait trop loin de notre sujet.

33. Revenons à la série $g_{nk}^{r_k}$. Nous avons dit que cette série pouvait ne pas être complète, ce dont on se rend très bien compte, puisque, pour déterminer si cette série est complète ou non, il faut envisager la perspective de la courbe sur un plan arbitraire et considérer la série des groupes de points projetés. Une question se pose alors : comment varient les défauts d_k de ces séries quand k augmente? Nous allons montrer que *les défauts d_k vont en diminuant ou restent fixes, quand k augmente, et qu'il arrive par conséquent un certain moment à partir duquel d_k reste fixe.*

Nous avons vu qu'à partir de la valeur χ de k, on est assuré que la série $g_{nk}^{r_k}$ n'est pas spéciale. D'ailleurs, on a

$$r_k - r_{k-1} \geqq n$$

à partir de $k = \chi + 1$. Donc, en posant

$$r_k = kn - p - d_k,$$

on a la relation

$$kn - p - d_k - [(k-1)n - p - d_{k-1}] \geqq n,$$

ou

$$d_k \leqq d_{k-1}.$$

En désignant par π le nombre $\chi(n-2-\chi)$ considéré plus haut, on a

$$d_k \leqq d_\chi \leqq \pi - p.$$

Par suite, *à partir d'une valeur de k assez grande, on a*

$$r_k = kn - p - d, \qquad 0 \leqq d \leqq \pi - p,$$

d étant un nombre fixe compris entre 0 *et* $\pi - p$.

34. On pourrait se proposer de trouver une valeur de k à partir de laquelle d_k a atteint certainement son minimum d. M. Castelnuovo a démontré (Mémoire cité) que cela a certainement lieu pour

$$k > \chi + \pi - p.$$

Nous ne démontrerons pas ce résultat; nous allons seulement chercher à obtenir une expression de d, en prenant pour k un nombre supérieur ou égal à $n - 2$.

Considérons la perspective Γ de la courbe gauche C sur un plan, en prenant un point de vue arbitraire O. La courbe Γ a un certain nombre h de points doubles apparents $a, b, c, \ldots$ correspondant aux couples de points (a_1, a_2), (b_1, b_2), ... de la courbe C, puis des points multiples i, projections des points multiples I de cette courbe. Les courbes d'ordre $k \geqq n-2$ adjointes à Γ déterminent une série complète $g_{n'_k}^{r'_k}$ non spéciale, et l'on a, par suite

$$r'_k = n'_k - p.$$

Donc, les cônes d'ordre k et de sommet O passant par ces adjointes définissent sur la courbe C une série linéaire de même ordre et de même dimension. Ces cônes passent par les points (a_1, a_2), ... et par les points multiples I. En chaque point I ils coupent la courbe C d'une manière bien déterminée, c'est-à-dire qu'il y a sur chaque branche de la courbe gauche en I autant de points de rencontre qu'en a une adjointe au point i avec la branche correspondante de la courbe Γ. Considérons alors toutes les surfaces Σ'_k d'ordre k passant par (a_1, a_2), ... par les points I et se comportant, en ces points, de la manière bien déterminée indiquée pour les cônes de même ordre.

Ces surfaces détermineront sur C la même série linéaire $g_{n'_k}^{r'_k}$, puisque la série linéaire correspondant à Σ'_k est de même ordre que pour les cônes et que la série relative aux cônes est complète. Envisageons maintenant toutes les surfaces Σ_k d'ordre k mais passant *seulement* par les points I, et de la manière indiquée; elles détermineront sur C une série d'ordre

$$n'_k + 2h.$$

Nous allons montrer que *cette série est complète*. Il suffit d'établir que le fait, pour une surface Σ_k, de passer par (a_1, a_2), (b_1, b_2), ... équivaut exactement à $2h$ conditions ou, en d'autres termes, que ces $2h$ points sont bien *indépendants* relativement à une Σ_k. Nous avons donc à faire voir qu'une surface Σ_k peut passer par a_1, (b_1, b_2), (c_1, c_2), ... sans passer par a_2. Pour cela, considérons dans le plan de Γ une courbe d'ordre $k-1$ $(k-1 \geqq n-3)$ passant par $b, c, \ldots$ et se comportant aux points i comme une adjointe, ce qui est toujours possible, mais ne passant pas

par a. On aura alors un cône d'ordre $k-1$ ne passant pas par Oa et rentrant dans les Σ_{k-1}. En lui adjoignant un plan passant par a_1, et non par a_2, on a bien une Σ_k qui passe par a_1, (b_1, b_2), (c_1, c_2), ... et non par a_2.

Donc, les Σ_k déterminent sur C une *série non spéciale complète,* d'ordre $n'_k + 2h$ et de dimension $n'_k + 2h - p$.

Nous sommes maintenant en mesure de répondre à la question, que nous nous sommes proposée, d'obtenir une expression du défaut d; nous y parviendrons en prenant pour k un nombre supérieur ou égal à $n-2$.

Soit d'abord le cas le plus simple où la *courbe gauche* C *est supposée n'avoir pas de points multiples*. Dans cette hypothèse, les surfaces Σ_k sont alors les surfaces arbitraires S_k de degré k. Les surfaces S_k déterminent donc sur C une série non spéciale et complète $g_{n_k}^{r_k}$: on a

$$n_k = nk, \qquad r_k = nk - p$$

et, par suite, dans ce cas

$$d = 0.$$

D'où nous concluons le résultat déjà obtenu au Chapitre VIII du tome Ier : le nombre N_k des conditions exprimant qu'une surface d'ordre k passe par une courbe gauche d'ordre n sans points multiples est égal à

$$N_k = nk - p + 1.$$

Considérons maintenant le cas où *la courbe* C *a des points multiples*. Soit μ le nombre des points de rencontre d'une Σ_k avec C confondus aux points I : si ces points sont à tangentes distinctes, on a

$$\mu = \Sigma\, i\,(i-1).$$

Les surfaces Σ_k déterminent sur C une série non spéciale complète. Or on a

$$n'_k = nk - 2h - \mu.$$

L'ordre de cette série est donc $nk - \mu$ et sa dimension $nk - \mu - p$. Désignons par ν_k le nombre des conditions qu'il faut imposer à une S_k pour qu'elle devienne une Σ_k, c'est-à-dire qui expriment qu'une S_k se comporte aux points I de la manière spécifiée plus haut. La dimension r_k de la série $g_{nk}^{r_k}$ déterminée sur C par toutes

les surfaces S_k d'ordre k sera alors

$$r_k = kn - \mu - p + \nu_k = kn - p - (\mu - \nu_k),$$

et comme nous savons que cette série n'est pas spéciale ($k \geqq n - 2$), il en résulte que son défaut d_k est

$$d_k = \mu - \nu_k,$$

nombre positif, puisqu'on a évidemment $\mu \geqq \nu_k$. Or d_k diminue ou reste constant quand k augmente, donc ν_k ne diminue jamais quand k augmente, et, à partir d'une valeur assez grande, garde une valeur constante ν. A partir de cette valeur de k, on a toujours le même défaut $\mu - \nu$.

Supposons que les points I soient des *points doubles à tangentes distinctes,* en nombre δ : on aura $\mu = 2\delta$. Or ν_k représente le nombre des conditions pour qu'une surface S_k passe par les δ points, en tout δ conditions indépendantes, puisque $k \geqq n - 2$. On a donc $\nu_k = \delta$, et par suite

$$d = \mu - \nu_k = \delta.$$

Supposons finalement le cas d'une courbe avec des points triples à tangentes distinctes, qui est le plus intéressant à considérer pour la théorie des surfaces. Il appelle l'attention sur la complication du problème de la recherche du nombre ν_k.

Soit I un point triple ordinaire de C. Une surface Σ_k doit couper chaque branche de courbe passant par I en *deux* points, puisqu'une adjointe à une courbe plane en un point triple i coupe chaque branche de cette courbe en deux points confondus en i : donc, *six* points de rencontre. Il s'agit maintenant de savoir combien de conditions entraîne pour la surface le fait de passer en I et de couper en deux points, confondus en I, chacune des trois branches de C qui passent par I. *Deux circonstances différentes sont possibles.*

Si les trois tangentes à C *en* I *ne sont pas dans un même plan,* la surface Σ aura en I trois tangentes non situées dans un même plan ; le point I sera un point double pour Σ, donc *quatre* conditions. D'ailleurs les points triples donnent des conditions indépendantes, comme on le voit en raisonnant sur les adjointes

planes ($k \geqq n - 2$). On a donc

$$d = \mu - \nu = 2t, \qquad \text{et} \qquad r_k = kn - p - 2t,$$

t étant le nombre des points triples.

Si les trois tangentes sont dans le même plan, la surface Σ, tangente en I à deux des tangentes, est tangente à la troisième; le nombre des conditions se réduit à *trois,* et l'on aura

$$d = \mu - \nu = 3t, \qquad r_k = kn - p - 3t.$$

CHAPITRE III.

DES SYSTÈMES LINÉAIRES DE COURBES DANS UN PLAN.

I. — Systèmes linéaires de courbes irréductibles dans un plan.

1. Les systèmes linéaires de courbes que nous avons envisagés jusqu'à présent étaient définis *a priori* par une relation de la forme

$$h_0\psi_0 + h_1\psi_1 + \ldots + h_r\psi_r = 0$$

où les ψ sont des fonctions entières de x, y, et les h des constantes arbitraires.

Dans ce qui va suivre, nous considérerons un système linéaire comme défini par la manière dont se comportent les courbes qui le composent en des points donnés du plan. Il y a lieu de préciser cette définition.

Soit o un point du plan, considérons les courbes passant par o et telles que, leur équation étant mise sous la forme

$$0 = \varphi_i(x, y) + \ldots + \varphi_n(x, y) + \ldots,$$

où φ_i désigne l'ensemble des termes homogènes de degré i, il existe entre les coefficients des φ jusqu'à un certain rang λ un certain nombre de relations *linéaires* et homogènes. Ces relations peuvent être regardées comme définissant une certaine manière de se comporter de ces courbes en o. En particulier, on exprimera d'une telle façon que les courbes ont en o, avec une courbe déterminée passant par ce point, un certain nombre d'éléments communs, parmi lesquels en premier lieu le degré de multiplicité.

Ceci posé, l'ensemble des courbes d'ordre n, se comportant de manières données en des points donnés o_1, o_2, ..., o_h du plan, constitue un système linéaire, soit

$$\alpha_0 Q_0 + \alpha_1 Q_1 + \ldots + \alpha_r Q_r = 0; \tag{1}$$

et si entre les polynomes Q, de même degré n, n'existe pas de relation linéaire, homogène et à coefficients constants, on dira que le système est de *dimension* r.

Le *degré* D de ce système linéaire est le nombre des points d'intersection variables de deux courbes arbitraires du système.

Le système linéaire sera *complet* ou *incomplet* suivant que l'on considère l'ensemble tout entier ou une partie de l'ensemble des courbes se comportant de la manière indiquée aux points donnés $o_1 \ldots o_h$, qui sont appelés les *points-bases du système*.

La propriété d'un système linéaire

$$(\Sigma) \qquad h_0\psi_0 + h_1\psi_1 + \ldots + h_r\psi_r = 0,$$

défini par des fonctions données $\psi_0 \ldots \psi_r$ de x et y d'ordre n, d'être complet ou incomplet, est donc toute relative. Il faut, pour que cette définition ait un sens, formuler, parmi les points communs à toutes les courbes ψ, ceux que l'on considère comme points-bases et le comportement des courbes en ces points. Suivant que l'on prend la totalité ou quelques-uns de ces points, et suivant le comportement choisi, le même système (Σ) pourra être complet ou incomplet. Il nous arrivera de dire que le système (Σ) définit un système complet : il faut entendre par là qu'on considère le système qui a comme points-bases tous les points communs aux courbes ψ avec, en ces points, le même comportement que la courbe générale du système (Σ). Le système complet ainsi défini a alors même *genre* et même *degré* que le système (Σ).

En vertu du théorème de Nöther, ces conditions se réduisent toujours à exprimer qu'une courbe a, en des points donnés, une multiplicité ordinaire donnée ; c'est ce que nous supposerons dans la suite.

2. Démontrons d'abord que *la courbe générale d'un système linéaire irréductible n'a pas de points multiples mobiles.*

Notons dans (1) un *faisceau* arbitraire que nous pouvons écrire

$$(2) \qquad \mu_0 Q_0 + \mu_1 Q_1 = 0,$$

où Q_0, Q_1 sont deux polynomes irréductibles de degré n. On va montrer que les points multiples de (2) ne se déplacent pas quand



le rapport $\frac{\mu_1}{\mu_0}$ varie. Or, en un point multiple (x_0, y_0) de (2), on a

$$\mu_0 \frac{\partial Q_0}{\partial x} + \mu_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 0,$$

$$\mu_0 \frac{\partial Q_0}{\partial y} + \mu_1 \frac{\partial Q_1}{\partial y} = 0,$$

et, par suite, les points multiples appartiennent aux deux courbes

$$(3) \qquad Q_0 \frac{\partial Q_1}{\partial x} - Q_1 \frac{\partial Q_0}{\partial x} = 0, \qquad Q_0 \frac{\partial Q_1}{\partial y} - Q_1 \frac{\partial Q_0}{\partial y} = 0.$$

Si ces deux courbes n'ont pas de partie commune, la proposition est démontrée. Supposons donc que ces deux courbes aient une partie commune, soit $\Gamma = 0$, qui ne peut être ni Q_0, ni Q_1, car si Q_0 était partie commune, il en serait de même de Q_1, à moins que tous les points de la courbe Q_0 ne satisfassent aux deux relations $\frac{\partial Q_0}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial Q_0}{\partial y} = 0$, ce qui n'a pas lieu. Posons

$$\frac{Q_0}{Q_1} = R(x, y);$$

en tous les points de la courbe Γ, on a, en vertu de (3),

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = 0$$

et, par suite, sur cette courbe, la fonction R garde une valeur constante soit $R = R_0$. La courbe Γ appartient donc à

$$(4) \qquad Q_0 - R_0 Q_1 = 0.$$

D'autre part, la courbe Γ est une courbe dont tous les points sont multiples, puisqu'on a sur Γ, $R = R_0$, $\frac{\partial R}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial y} = 0$. On en conclut que R_0 est une constante telle que la courbe (4) admette au moins un facteur *carré,* et est, par suite, une valeur *particulière* de la constante $-\frac{\mu_1}{\mu_0}$. Ainsi un point arbitraire d'une courbe Γ commun aux courbes (3), s'il en existe une, ne peut être point multiple de $\mu_0 Q_0 + \mu_1 Q_1 = 0$, quand $\frac{\mu_1}{\mu_0}$ est arbitraire, et le théorème est démontré.

3. Soit $|C_n|$ un système *complet* d'ordre n. Désignons par k_n le nombre des conditions auxquelles doit satisfaire une courbe d'ordre n pour passer de la manière indiquée par les points-bases. La dimension de $|C_n|$ sera donnée par la formule

$$r_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 - k_n.$$

Il peut arriver que k_n dépende de n. Tout d'abord ce nombre ne peut pas décroître avec n, puisque parmi les courbes du système $|C_{n+1}|$ se trouvent les courbes $|C_n|$ et une droite arbitraire. En second lieu le nombre k_n est évidemment au plus égal à la somme des conditions relatives à chaque point-base pris isolément. Il a donc un maximum fini, soit k. Donc *à partir d'une certaine valeur de n,* on a $k_n = k$, et l'on a alors

$$r_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 - k.$$

Quand n a la valeur à partir de laquelle $k_n = k$, *le système est dit régulier;* quand le système n'est pas régulier, la différence $k - k_n$ porte le nom de *surabondance*.

Indiquons un exemple où k_n variera au début avec n. On sait que toutes les courbes du troisième ordre passant par *huit* points ont un neuvième point commun. Si donc on prend les neuf points communs à un *faisceau* de courbes du troisième ordre, comme points-bases simples d'un système linéaire, on aura, pour $n = 3$, $r_n = 1$ et $k_n = 8$, tandis que, pour $n \geq 4$, on a $k_n = 9$.

4. *Soient* $|C_n|$ *un système complet, régulier et irréductible,* π le genre de la courbe générale, D le degré du système, et r_n sa dimension : *Il existe une relation importante entre* D, π et r_n. On a, en effet, en désignant par λ le degré de multiplicité d'un point-base,

$$\pi = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{\lambda(\lambda-1)}{2},$$

$$r_n = \frac{n(n+3)}{2} - \sum \frac{\lambda(\lambda+1)}{2},$$

$$D = n^2 - \sum \lambda^2.$$



d'où l'on conclut la *relation cherchée*

$$\pi + r_n = D + 1.$$

5. Sur chaque courbe d'un système linéaire complet, régulier ou non, les autres courbes du système déterminent une série linéaire de groupes de points qui porte le nom de *série caractéristique*.

La série caractéristique est complète, que le système soit régulier ou non. En effet, l'ensemble des courbes du système forme, par rapport à l'une d'entre elles, l'ensemble des adjointes d'ordre n qui, ayant déjà par définition chaque point multiple d'ordre λ comme point d'ordre $\lambda - 1$, sont, *en outre,* assujetties à avoir λ points d'intersection réunis en un seul en chacun de ces points-bases. En vertu du théorème démontré précédemment (Chap. II, n° 4) la série linéaire ainsi déterminée est complète.

Si, en outre, le système linéaire est *régulier,* la série caractéristique sera *non spéciale;* car sa dimension est $r_n - 1$ et l'on a

$$r_n - 1 = D - \pi.$$

Si le système linéaire *n'est pas régulier,* la série caractéristique sera *spéciale*. On a, en effet, en désignant par ε_n la surabondance

$$r_n = \frac{n(n+3)}{2} - \sum \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} + \varepsilon_n,$$

d'où

$$r_n - 1 = D - \pi + \varepsilon_n.$$

Donc : *La série caractéristique sera non spéciale ou spéciale suivant que le système linéaire de courbes sera régulier ou non* (¹).

La réciproque est évidente : *Un système linéaire est régulier ou non suivant que la série caractéristique est non spéciale ou spéciale*. En particulier le système linéaire des courbes adjointes d'ordre $\geq m - 3$ est régulier.

(¹) Pour l'étude de la série caractéristique dans l'étude des systèmes linéaires de courbes planes, *voir* SEGRE, *Rendiconti di Palermo,* 1887, et CASTELNUOVO, *Mémoires de l'Académie de Turin,* série II, t. XLII.

6. Le *système adjoint* à un système linéaire est formé par l'ensemble de toutes les adjointes d'ordre $n - 3$ à une courbe arbitraire du système.

Le système adjoint détermine donc sur chaque courbe du système la série canonique $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$.

Il ne faudrait pas croire que le système adjoint à un système $|C_n|$ soit toujours le seul système linéaire pouvant détacher sur C_n la série canonique. Voici un exemple du contraire : Considérons une cubique f_3 et une quartique f_4 quelconques : elles ont douze points communs $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$. Prenons ces points comme points-bases simples d'un système de quartiques. Ces quartiques seront de la forme

$$(\alpha x + \beta y + \lambda) f_3 + f_4 = 0, \tag{5}$$

soit un système de dimension 3. Une courbe quelconque de ce système, qu'on peut supposer être f_4, est découpée par toutes les autres suivant la série caractéristique, laquelle en vertu de l'équation (5) est aussi déterminée par les droites arbitraires

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

et l'ensemble de ces droites forme le système canonique.

Dans ce cas, la série canonique et la série caractéristique coïncident, et le système linéaire $|C_n|$ est coupé par lui-même suivant la série canonique.

7. Un *système complet, somme de deux systèmes complets* $|C_1|$ et $|C_2|$ d'ordres respectifs m et n, est, par définition, un système d'ordre $m + n$, ayant comme point-base d'ordre $\mu + \nu$ un point base d'ordre μ de l'un et d'ordre ν de l'autre.

Désignons par D_1, D_2 les degrés respectifs des deux systèmes, et soit i le nombre des points d'intersection d'une courbe C_1 avec une courbe C_2 : le degré D du système-somme sera évidemment

$$D = D_1 + D_2 + 2i.$$

Soient, en effet

$$\alpha_0 Q_0 + \alpha_1 Q_1 + \ldots = 0,$$
$$\beta_0 P_0 + \beta_1 P_1 + \ldots = 0$$



les deux systèmes donnés. Le système

$$\sum A_{ik} Q_i P_k = 0$$

appartient au système-somme. Il suffit alors de compter le nombre des points d'intersection, en dehors des points-bases, des deux courbes

$$Q_i P_k = 0, \qquad Q_{i'} P_{k'} = 0.$$

Le genre de la courbe somme de deux autres, supposée irréductible, èst donné par la formule

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1,$$

ainsi qu'il résulte immédiatement des trois relations

$$\pi_1 = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \sum \frac{\mu(\mu-1)}{2},$$

$$\pi_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{\nu(\nu-1)}{2},$$

$$i = mn - \sum \mu\nu.$$

8. *Tout système algébrique Σ de courbes planes indécomposables, tel que, par k points arbitraires du plan, passe une seule courbe du système, est un système linéaire.* — Il existe plusieurs démonstrations de ce théorème dues à MM. Castelnuovo et Enriques, et à M. Humbert; voici la démonstration de M. Humbert : Admettons que la proposition soit vraie pour $k-1$ points, nous allons montrer qu'elle est vraie pour k points. En effet, considérons l'ensemble des courbes du système Σ passant par un point A; ce système est infini de l'ordre $k-1$ et, par suite, linéaire. Soit

$$(\alpha) \qquad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k = 0$$

ce système. Envisageons alors une courbe $f_0(x, y) = 0$ de Σ ne passant pas par A, et soit B (x_0, y_0) un point quelconque de cette courbe. L'ensemble des courbes de Σ passant par B forme encore un système linéaire de dimension $k-1$, qui contient la courbe f_0 et les courbes de (α) passant par B : il appartient donc au système linéaire à k dimensions

$$(\beta) \qquad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k = 0$$

dans lequel les constantes λ sont assujetties à la seule relation

$$\lambda_1 f_1(x_0, y_0) + \ldots + \lambda_k f_k(x_0, y_0) = 0,$$

les coordonnées x_0, y_0 du point B satisfaisant seulement à l'équation $f_0(x, y) = 0$. On en conclut que toute courbe du système (β), *quels que soient* les λ, appartient à Σ. Car, pour des λ *donnés* arbitrairement, on peut choisir un point $x_0 y_0$, tel que l'on ait à la fois

$$f_0(x_0, y_0) = 0, \qquad \lambda_1 f_1(x_0, y_0) + \ldots + \lambda_k f_k(x_0, y_0) = 0.$$

Toutes les courbes du système (β) appartiennent donc à Σ et comme par k points du plan ne passe qu'une courbe de Σ, on en conclut réciproquement que toute courbe de Σ appartient à (β), c'est-à-dire que *le système Σ est linéaire*.

Il reste à démontrer que le théorème est vrai pour $k = 1$. Dans ce cas, deux courbes du système ne peuvent se couper qu'en des points fixes. Soient f_1 et f_2 deux de ces courbes d'ordre n; elles ont n^2 points communs, et toute courbe ψ du système passe par ces points. Or, on peut choisir λ de manière que la courbe

$$f_1 + \lambda f_2 = 0$$

passe par un point de ψ en dehors de ces points; cette courbe aura alors $n^2 + 1$ points communs avec ψ et, par suite, coïncidera avec elle, c'est-à-dire qu'on aura

$$\psi = f_1 + \lambda f_2$$

et le théorème est démontré.

Nous étudierons bientôt pour les surfaces une proposition comprenant comme cas particulier le théorème précédent quand k est supérieur à l'unité.

II. — Systèmes linéaires de genre zéro. Surfaces dont toutes les sections planes sont unicursales.

9. Parmi les systèmes linéaires, il y a lieu de mentionner ceux de genre *zéro*. Nous en ferons une application à la recherche des surfaces dont toutes les sections planes sont unicursales.



Soit donc un système complet de genre zéro et d'ordre n. On aura d'abord la relation

$$\sum \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

et, en désignant par r la dimension du système et D son degré, on a en outre

$$D = n^2 - \Sigma\lambda^2,$$
$$r = D + 1 + \varepsilon;$$

la surabondance ε étant nulle si le système est régulier. *On va voir de suite que* $\varepsilon = 0$. En effet, dans le cas contraire, prenons $D + \varepsilon$ points arbitraires du plan ; on pourra, par ces points, faire passer un faisceau de courbes du système. Le nombre des points de rencontre de deux courbes de ce faisceau sera au moins égal à $\Sigma\lambda^2 + D + \varepsilon$ ou à $n^2 + \varepsilon$, ce qui exige que l'on ait $\varepsilon = 0$.

10. Les *transformations de Cremona* dans le plan fournissent un premier exemple de systèmes linéaires de genre zéro. Ces transformations sont définies, en coordonnées homogènes, par les équations

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \rho X = f(x, y, z), \\ \rho Y = \varphi(x, y, z), \\ \rho Z = \psi(x, y, z), \end{cases}$$

où ρ est un facteur de proportionnalité, et où f, φ, ψ désignent trois fonctions homogènes de même degré n en x, y, z, linéairement indépendantes. Elles sont telles qu'à un point (X, Y, Z) ne correspond qu'un point (x, y, z) et réciproquement. Les deux faisceaux

$$f + \lambda\varphi = 0, \qquad f + \mu\psi = 0$$

n'auront alors qu'un point commun variable avec λ et μ, et des équations (α), on pourra déduire le système (β)

$$(\beta) \qquad \begin{cases} \sigma x = F(X, Y, Z), \\ \sigma y = \Phi(X, Y, Z), \\ \sigma z = \Psi(X, Y, Z), \end{cases}$$

les fonctions F, Φ, Ψ étant du même ordre ν et sans facteur commun.

D'ailleurs, on a évidemment $\nu = n$, puisque, aux points de rencontre de

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

avec la courbe

$$A f + B \varphi + C \psi = 0,$$

en nombre n, correspondent les points de rencontre de

$$\alpha F + \beta \Phi + \gamma \Psi = 0$$

avec

$$AX + BY + CZ = 0.$$

De plus, dans le plan (x, y, z), le réseau

$$A f(x, y, z) + B \varphi(x, y, z) + C \psi(x, y, z) = 0$$

est un réseau linéaire de courbes de genre *zéro,* puisque cette courbe est évidemment unicursale.

11. Nous allons faire une application des résultats qui précèdent à l'étude des *surfaces dont toutes les sections planes sont unicursales* (¹). Tout d'abord, on voit aisément qu'*une telle surface est unicursale* et peut être représentée par des équations de la forme

$$x = f_1(\alpha, \beta, \gamma), \qquad y = f_2(\alpha, \beta, \gamma), \qquad z = f_3(\alpha, \beta, \gamma), \qquad t = f_4(\alpha, \beta, \gamma).$$

Prenons en effet sur la surface supposée d'ordre n, $n - 3$ points en ligne droite, et par cette droite faisons passer un plan quelconque. Soit λ le paramètre variable dont dépend la position du plan. La courbe d'intersection de la surface et du plan est unicursale; si donc, dans ce plan, on considère un faisceau d'adjointes d'ordre $n - 2$ passant par les $n - 3$ points considérés, ce faisceau rencontrera en *un* seul point *mobile* la courbe d'intersection, dont les coordonnées seront par conséquent des fonctions rationnelles du paramètre variable μ des courbes du faisceau. D'autre part, les coefficients de l'équation du faisceau contiennent rationnellement le paramètre λ dont dépend la position du plan; et la conclusion est immédiate.

(¹) É. Picard, *Sur les surfaces dont toutes les sections planes sont unicursales* (*Bulletin de la Société philomathique de Paris,* 1878, et *Journal de Crelle,* t. 100).

Envisageons maintenant, dans le plan (α, β, γ), le système linéaire

$$(\Sigma) \qquad A f_1 + B f_2 + C f_3 + D f_4 = 0.$$

Ce système, par hypothèse, doit être de genre zéro.

Le système linéaire *complet* (S), défini par le système (Σ), et dans lequel ce dernier est compris, est de genre zéro et a même degré D que (Σ).

D'après ce que nous avons dit plus haut, le système complet (S) sera de dimension $D + 1$ ([1]), et D sera en outre, comme on le voit de suite, égal au degré n de la surface.

Prenons, dans le plan (α, β, γ), $D - 1$ points arbitraires

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \quad \ldots, \quad (\alpha_{D-1}, \beta_{D-1}, \gamma_{D-1})$$

distincts entre eux et différents des points communs aux quatre courbes f. Si m désigne l'ordre des courbes f, nous pouvons trouver une courbe d'ordre m appartenant au système (S) et passant par ces points; cette courbe dépendra de *deux* paramètres et aura une équation de la forme

$$\lambda U(\alpha, \beta, \gamma) + \mu V(\alpha, \beta, \gamma) + \nu W(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Ce réseau est de degré *un;* il définit par suite une transformation birationnelle, soit

$$\begin{aligned} X &= U(\alpha, \beta, \gamma), & Y &= V(\alpha, \beta, \gamma), & Z &= W(\alpha, \beta, \gamma), \\ \alpha &= U_1(X, Y, Z), & \beta &= V_1(X, Y, Z), & \gamma &= W_1(X, Y, Z). \end{aligned}$$

Les points fondamentaux de cette transformation, dans le plan (α, β, γ), sont d'une part les points-bases du système (Σ) et d'autre part les $D - 1$ points fixes $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$.

En effectuant cette transformation, une courbe arbitraire de (S) se transforme en une partie fixe commune à *toutes* les courbes du système, que nous pouvons laisser de côté, et en une partie

---

([1]) Dans les Mémoires cités, M. Picard admettait implicitement ce résultat, c'est-à-dire qu'un système complet de genre *zéro* est régulier : la démonstration en est intuitive, comme on l'a vu au n° 9. M. Guccia a repris depuis, à un tout autre point de vue, l'étude de la réduction des systèmes linéaires de courbes dans plusieurs Mémoires des *Rendiconti di Palermo* (t. I).

variable avec les paramètres du système (S), soit

$$(S_1) \qquad F(X, Y, Z) = 0.$$

Quant aux courbes particulières

$$(\sigma) \qquad \lambda U + \mu V + \nu W = 0$$

qui appartiennent à (S), mais qui passent par les points $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, elles se transforment, en laissant toujours de côté la partie fixe précédente, en une droite arbitraire $\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$ et en $D - 1$ droites fixes distinctes correspondant aux points fondamentaux $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$. Désignant par $\Phi(X, Y, Z)$ l'ensemble de ces $D - 1$ droites, la transformée de (σ) est donc

$$(\sigma_1) \qquad (\lambda X + \mu Y + \nu Z)\,\Phi(X, Y, Z) = 0.$$

Or, les courbes (S) et (σ) ont D points de rencontre variables, auxquels correspondent évidemment, puisque la courbe générale de (S) ne passe pas par les points $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, les points de rencontre de la courbe F avec la droite $\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$. D'où l'on conclut déjà que la courbe F est de degré D.

D'autre part, la courbe F est la courbe générale d'un système linéaire de genre zéro, puisque le système (S) est de genre zéro. Elle doit donc avoir un nombre de points multiples *fixes* équivalent à $\frac{(D-1)(D-2)}{2}$, et qui ne peuvent être que les $\frac{(D-1)(D-2)}{2}$ points de rencontre des $D - 1$ droites distinctes $\Phi = 0$.

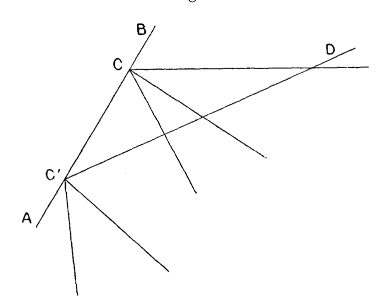
Le point capital à établir maintenant est que *les* $D - 1$ *droites formant* Φ, *sauf le cas* $D = 4$, *passent par un même point* O, et, par suite, que la courbe F a en O un point multiple d'ordre $D - 1$.

Prenons en effet une des $D - 1$ droites, soit AB, et supposons qu'il y ait sur AB un point multiple d'ordre p, c'est-à-dire que $p - 1$ droites viennent se rencontrer en un même point C de AB. Il reste $D - p - 1$ droites qui devront couper AB au même point, car si une des $D - p - 1$ droites en question ne coupait pas AB au même point que les autres, ce point serait un point double pour F et il y aurait sur AB un point multiple d'ordre p, un point multiple d'ordre $D - p - 1$, plus un point double, soit en tout

$D + 1$ points. Il y a donc, dans cette hypothèse, sur AB un point C' multiple d'ordre $D - p$.

Mais prenons une droite C'D parmi celles qui passent en C'. Il y a sur C'D, $p - 1$ points doubles, plus un point multiple d'ordre $D - p$, donc en tout $D + p - 2$ points de rencontre avec F, et comme $p \geqq 2$, il faut que $p = 2$ pour que ce nombre ne dépasse

Fig. 5.



pas D. Dans ce cas, nous avons sur AB un point double C et un point C' d'ordre $D - 2$. Mais alors, sur la droite CD, il y aurait $D - 2$ points doubles, soit $2(D - 2)$ points de rencontre avec F. Ce nombre n'est inférieur à D que si $D = 4$, ou $D = 3$.

D'ailleurs, pour $D = 3$, il n'y a évidemment pas d'exception. Donc, sauf pour $D = 4$, les droites Φ, en nombre $D - 1$, concourent en un même point, et ce point est pour F un point multiple d'ordre $D - 1$.

Revenant maintenant aux fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 qui définissent notre surface, elles se transforment en quatre fonctions F_1, F_2, F_3, F_4, telles que les quatre courbes $F_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ont en commun un point multiple d'ordre $D - 1$, on peut supposer que ce soit le point $X = 0$, $Y = 0$, et la surface est alors représentée par des équations de la forme

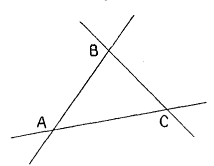
$$\begin{aligned} x &= A_1(X, Y) + Z B_1(X, Y), \\ y &= A_2(X, Y) + Z B_2(X, Y), \\ z &= A_3(X, Y) + Z B_3(X, Y), \\ t &= A_4(X, Y) + Z B_4(X, Y), \end{aligned}$$

où les A sont des fonctions homogènes d'ordre D et les B d'ordre $D - 1$, c'est-à-dire que la *surface est réglée*.

Pour $D = 4$, les trois droites Φ peuvent former un triangle. La surface est alors représentée par les équations

$$x = F_1(X, Y, Z),\quad y = F_2(X, Y, Z),\quad z = F_3(X, Y, Z),\quad t = F_4(X, Y, Z),$$

Fig. 6.



où les F sont des courbes du quatrième ordre avec trois points doubles A, B, C. De telles courbes sont des transformées de coniques, comme on le voit en posant

$$X = \frac{1}{X'},\qquad Y = \frac{1}{Y'},\qquad Z = \frac{1}{Z'}.$$

Les équations de la surface se mettent finalement sous la forme

$$x = \lambda_1(X', Y', Z'),\ y = \lambda_2(X', Y', Z'),\ z = \lambda_3(X', Y', Z'),\ t = \lambda_4(X', Y', Z'),$$

les λ étant des coniques. C'est une surface de Steiner.

En résumé :

Les seules surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales sont les surfaces réglées unicursales et la surface du quatrième degré de Steiner [1].

III. — Des involutions sur les courbes algébriques.

12. La considération des systèmes linéaires va se présenter dans l'étude intéressante des involutions sur une courbe algébrique.

Soit, sur une courbe $f(x, y) = 0$, une série de groupes de n points, tels que chaque groupe soit déterminé d'une manière unique et sans exception, si l'on en donne k points. On dira que

(1) Ce théorème pourrait encore être regardé comme un cas particulier d'une proposition énoncée en 1886 par Kronecker : *Toute surface algébrique irréductible possédant une double infinité de sections planes réductibles est réglée ou est une surface de Steiner* (*voir* pour la démonstration de ce théorème une Note de M. Castelnuovo dans les *Rendiconti della Accademia dei Lincei*, 1894).

ces points forment *une involution d'ordre n et de dimension k :* I_n^k.

D'après cette définition, les n points jouent un rôle symétrique dans la détermination du groupe, c'est-à-dire que si l'on prend k points au hasard, ces k points déterminent sans ambiguïté les $n-k$ autres, ce qui exclut le cas où deux groupes de la série, ayant en commun un ou plusieurs points, en nombre inférieur à k, auraient en conséquence d'autres points communs. Cette circonstance peut d'ailleurs se présenter pour une série de dimensions au moins égale à *deux,* mais alors la série est formée de groupes dont chacun est *composé* d'un nombre entier $r > 1$ de groupes arbitraires d'une même *involution,* comprise dans le sens que nous lui avons donné.

Dans le premier cas, nous dirons que *l'involution est simple* et dans le second cas qu'*elle est composée.*

Or, considérons une série linéaire g_n^r *simple,* c'est-à-dire telle que l'obligation de contenir un point n'entraîne pas comme conséquence, pour ses groupes, l'obligation de passer par d'autres points déterminés par le premier. Cette série est évidemment une involution I_n^r simple.

La question suivante se pose alors : Puisque toute série linéaire simple est une involution, réciproquement toute involution simple est-elle une série linéaire?

Il en est bien ainsi lorsque la dimension k de l'involution est supérieure à *un.* Mais pour $k=1$, il existe des involutions qui ne sont pas linéaires. Telles sont, par exemple, les séries découpées par les génératrices d'une surface réglée irrationnelle sur les courbes appartenant à la surface.

13. Nous nous proposons donc de montrer qu'une involution simple I_n^k peut être obtenue linéairement, c'est-à-dire que *ses groupes sont ceux que déterminent sur la courbe f des courbes formant un système linéaire, sauf peut-être pour la valeur* $k=1$ (¹).

(¹) La démonstration qui suit est due à M. Humbert [*Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques* (*Journal de Mathématiques,* 1894)].

Soit $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un groupe de l'involution, et soit $g(x, y)$ une fonction rationnelle telle que l'intégrale

$$\int g(x, y)\, dx,$$

relative à la courbe f, soit de première espèce. Formons la somme

$$g(x_1, y_1)\, dx_1 + \ldots + g(x_n, y_n)\, dx_n;$$

elle peut s'exprimer en fonction des coordonnées et des différentielles de k points du groupe, soient les points $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, d'où l'équation

$$(1) \qquad g(x_1, y_1)\, dx_1 + \ldots + g(x_n, y_n)\, dx_n = A_1\, dx_1 + \ldots + A_k\, dx_k,$$

les A étant des fonctions rationnelles de $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$.

Des propriétés des intégrales de première espèce, il résulte d'abord que A_i ne dépend que de (x_i, y_i), puisque l'intégrale

$$(S) \qquad \int A_i(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k)\, dx_i$$

devant être de première espèce est nécessairement de la forme

$$\int [\alpha_1 g_1(x_i, y_i) + \ldots + \alpha_p g_p(x_i, y_i)]\, dx_i,$$

où les g_i sont relatifs à p intégrales de première espèce linéairement indépendantes de la courbe f, supposée de genre p, et où les α sont *a priori* des fonctions rationnelles de

$$(x_1, y_1), \quad \ldots, \quad (x_{i-1}, y_{i-1}), \quad (x_{i+1}, y_{i+1}), \quad \ldots, \quad (x_k, y_k).$$

Or ces fonctions ne peuvent être que des constantes, puisque l'intégrale (S) doit rester finie quelles que soient ces variables.

Donc A_i est simplement fonction de (x_i, y_i). D'autre part, le second membre de (1) doit être symétrique en $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, donc on a

$$A_1 = \lambda(x_1, y_1), \qquad A_2 = \lambda(x_2, y_2), \qquad \ldots, \qquad A_k = \lambda(x_k, y_k).$$

Mais on peut définir le groupe G au moyen de

$$(x_1, y_1), \quad \ldots, \quad (x_{k-1}, y_{k-1}), \quad (x_{k+1}, y_{k+1});$$

le premier membre ne change pas, et par suite on a le système



d'équations

$$\lambda(x_1, y_1)\,dx_1 = \lambda(x_2, y_2)\,dx_2 = \ldots = \lambda(x_n, y_n)\,dx_n.$$

Si λ *n'est pas identiquement nul,* ces équations, pour un groupe initial G_0, déterminent $x_2, \ldots, x_n$ en fonction de x_1, et par suite, on doit avoir $k = 1$. Le système peut ne pas être linéaire. C'est le cas exceptionnel que nous avons mentionné.

14. Supposons donc $k > 1$; les λ sont identiquement nuls. On aura alors, pour les p intégrales de première espèce g_i, les p équations

$$(2) \quad g_i(x_1, y_1)\,dx_1 + \ldots + g_i(x_n, y_n)\,dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Ces équations déterminent sur f une série de groupes de points dans laquelle notre série sera évidemment comprise. Or, en vertu d'un théorème bien connu, tous les groupes de points vérifiant uniquement les relations (2) sont découpés sur f par des adjointes qui ne rencontrent en outre f qu'en des points fixes. Soit

$$(3) \qquad \lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_r\varphi_r = 0$$

la série linéaire complète satisfaisant à ces conditions, les φ étant, bien entendu, linéairement indépendants sur la courbe : on a

$$r \geqq k,$$

puisque la série des groupes en involution (I) est comprise dans la série déterminée par le système (3), et l'on aura l'involution en assujettissant les λ à $r - k$ relations algébriques et homogènes convenables. Il faut montrer que *ces relations sont linéaires,* sous la condition admise que k points arbitraires de f déterminent *un seul* groupe de l'involution.

Considérons le système S formé, dans le système linéaire (3), par les courbes de ce système qui découpent sur f les groupes de l'involution (I). La courbe générale de S est d'abord indécomposable, sinon les groupes de (I) seraient formés de points jouant un rôle dissymétrique, ou bien chaque groupe de (I) *se composerait* de groupes d'une involution d'ordre inférieur, cas que nous avons écarté.

De plus, par k points pris au hasard sur f ne passe qu'une

courbe du système S. Supposons en effet qu'il en passe *deux*. Ces deux courbes passeraient aussi par les $n-k$ points de f qui, avec les k points primitifs, forment un groupe de I, et comme toutes les courbes de S coupent f aux mêmes points fixes, on pourrait, en désignant par $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ les équations des deux courbes, trouver une constante θ telle que $S_1 + \theta S_2 = 0$ passât par un nouveau point de f, ce qui nécessite que $S_1 + \theta S_2$ soit divisible par f. Il existerait alors une combinaison des φ divisible par f, ce qui n'a pas lieu.

Ceci posé, deux cas peuvent se présenter. Ou bien par k points quelconques *du plan* ne passe qu'*une* courbe du système S, et alors celle-ci est linéaire en vertu du théorème démontré plus haut.

Ou bien par k points quelconques du plan passe un certain nombre $r > 1$ de courbes de S. Prenons $k-1$ points quelconques du plan et *un* point quelconque sur la courbe f. Deux hypothèses pourront encore être faites : On peut supposer que par ces points passent moins de r courbes distinctes du système ou qu'il en passe r.

Dans la première hypothèse, deux au moins des courbes passant par les k points ainsi choisis coïncident, et alors on voit que f serait l'enveloppe des courbes du système qui passent par $k-1$ points arbitraires du plan, ce qui revient à dire que toutes les courbes du système S touchent f en un ou plusieurs points mobiles. Or chacune de ces courbes ne coupe f qu'en n points mobiles qui constituent un groupe de l'involution, et les points d'un groupe général sont évidemment distincts deux à deux. Cette hypothèse est donc inadmissible.

Dans la deuxième hypothèse, nous distinguerons encore deux cas, suivant que par $k-2$ points arbitraires du plan et par *deux* points de f il passe moins de r courbes ou r courbes de S. On verrait comme précédemment que le premier de ces deux cas est impossible. On ne peut donc adopter que le second. Et en continuant ainsi de proche en proche, on arriverait à la conclusion que par k points de f passent plusieurs courbes *distinctes* de S, ce que nous avons démontré être impossible.

Donc le système S est linéaire et le théorème est établi.

15. Comme exemple d'*involution composée,* considérons une série linéaire g_n^r *non simple,* c'est-à-dire telle que tous les groupes qui ont en commun un point arbitraire A_1, ont en conséquence $\rho - 1$ autres points communs $A_2, \ldots, A_\rho$. Ces ρ points jouent d'ailleurs un rôle symétrique, de sorte que les groupes qui passent par A_2, par exemple, ont en commun $A_1, A_3, \ldots, A_\rho$ et aucun autre point : ils forment donc une involution simple I_ρ^1 de dimension *un*. La série g_n^r ainsi définie est une involution composée dont chaque groupe est formé d'un nombre entier k de groupes appartenant à une involution simple I_ρ^1, et l'on a

$$n = k\rho, \qquad \rho \geqq 2.$$

Voici quelques conséquences de cette définition : Supposons qu'une telle série g_n^r soit complète et non spéciale : on a alors

$$n - r = p.$$

D'autre part, comme r points arbitraires déterminent un groupe de la série, on a

$$k \geqq r,$$

par suite

$$n \geqq 2r,$$

et

$$p = n - r \geqq \frac{n}{2}.$$

Donc une série complète et non spéciale est toujours simple si $n > 2p$. En particulier, les adjointes d'ordre supérieur à $m - 3$, m étant le degré de la courbe f, déterminent une série simple, puisque n est égal au moins à $2p - 2 + m$ (adjointes d'ordre $m - 2$).

Les adjointes d'ordre $m - 3$ peuvent donner naissance à une involution composée.

Il faut pour cela, puisque $n = 2p - 2$ et $r = p - 1$, que l'on ait

$$2p - 2 = k\rho$$

avec

$$k \geqq r$$

et

$$\rho \geqq 2,$$

d'où

$$\rho = 2, \qquad k = r = p - 1.$$

Par suite, si la série canonique est une involution composée, son groupe est formé d'un nombre $p-1$ d'involutions simples I_2^1 d'ordre *deux*. Considérons alors le système linéaire de toutes les adjointes d'ordre $m-3$ qui passent par $p-2$ points fixes de la courbe, elles détermineront une g_2^1 : ce sont des courbes hyperelliptiques, car elles peuvent évidemment être transformées point par point en courbes telles que

$$y^2 - R(x) = 0.$$

Il suffit pour s'en assurer de considérer le faisceau $P + \lambda Q = 0$ des adjointes qui déterminent la g_2^1.

Réciproquement, il est clair que les courbes hyperelliptiques $y^2 - R(x) = 0$ contiennent une série linéaire g_2^1 formée par les droites $x = \text{const.}$

CHAPITRE IV.

SYSTÈMES LINÉAIRES DE SURFACES : SURFACES SOUS-ADJOINTES ET SURFACES ADJOINTES.

I. — Des systèmes linéaires de surfaces.

1. Nous avons défini, dans le Chapitre précédent, les systèmes linéaires de courbes planes par leur comportement en des points donnés du plan, les *points-bases,* et nous avons insisté sur la manière dont il fallait comprendre cette définition.

Les *systèmes linéaires de surfaces,* d'ordre donné, sont définis par leurs comportements suivant certaines *lignes-bases* et en certains *points-bases* donnés.

Pour les *lignes-bases* nous supposerons que ce comportement est défini par le comportement, en un point O *arbitraire* de la ligne-base, de la courbe intersection de la surface par un plan *arbitraire* passant par le point O.

Quant aux *points-bases,* que nous désignerons plus particulièrement sous le nom de *points-bases isolés,* qui sont en nombre fini, et qui peuvent être d'ailleurs soit des points extérieurs aux lignes-bases, soit des points particuliers des lignes-bases, on procédera comme pour les courbes planes. Soit O un de ces points, que nous supposerons être l'origine des coordonnées, après avoir mis les équations des surfaces passant par ces points sous la forme

$$0 = \varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) + \ldots,$$

où φ_i désigne l'ensemble des termes homogènes de degré i, le comportement de ces surfaces en ces points sera défini par un certain nombre de relations linéaires et homogènes entre les coefficients des φ jusqu'à un certain rang λ.

2. Un système linéaire de surfaces d'ordre donné n sera *com-*

plet ou *incomplet* suivant que l'on considère l'ensemble tout entier ou une partie de l'ensemble des surfaces d'ordre n se comportant de la manière indiquée aux points-bases donnés et le long des lignes-bases données.

3. En restant toujours dans les hypothèses bien nettement spécifiées plus haut, envisageons un système linéaire *complet* de surfaces d'ordre n, soit $|\Phi^n|$, défini *seulement* par certaines *lignes-bases*.

Si l'on considère l'intersection de ce système par un plan général α, on obtiendra ainsi, dans ce plan, un système linéaire de courbes d'ordre n, qui a ses points-bases aux points d'intersection du plan et des lignes-bases, et qui s'y comporte de la manière donnée. Mais ce système de courbes planes *pourra être complet ou incomplet*. Dans tous les cas, il est contenu dans un système complet $|\Gamma^n_\alpha|$, complètement défini par les points-bases.

4. Étant données des lignes-bases et un comportement défini dans un plan arbitraire, considérons d'une part le système linéaire $|\Phi^n|$ ainsi défini, et d'autre part le système linéaire $|\Psi^n|$ défini par la condition que ses surfaces se comportent de la manière voulue, le long des lignes-bases, mais seulement dans le plan général passant par une droite donnée A. Le système $|\Phi^n|$ est évidemment compris dans le système $|\Psi^n|$, s'il ne coïncide pas avec lui. Nous allons montrer que *ces deux systèmes coïncident*.

Sur un plan général α de l'espace, les courbes découpées par $|\Phi^n|$ appartiennent à un système complet de courbes $|\Gamma^n_\alpha|$, et les courbes découpées par $|\Psi^n|$ appartiennent à un système complet $|\Delta^n_\alpha|$. Supposons que $|\Psi^n|$ et $|\Phi^n|$ ne coïncident pas, il faudrait que, pour un plan arbitraire α, les comportements de la section correspondante de $|\Psi^n|$ aux points de rencontre avec les lignes-bases exigeassent moins de conditions que pour $|\Phi^n|$. Or les courbes Δ et Γ étant de même ordre n, il faudrait que le *degré* (nombre des points d'intersection en dehors des points-bases) du système $|\Delta^n_\alpha|$ fût supérieur à celui du système $|\Gamma^n_\alpha|$. Or ces deux systèmes ont même degré : en effet, le degré du premier système est l'ordre de la courbe d'intersection de deux surfaces Φ, et le degré du second l'ordre de la courbe d'intersection de deux surfaces Ψ; et

ces deux ordres sont égaux, car ces deux courbes coupent en un même nombre de points un plan arbitraire passant par A. Les deux systèmes $|\Phi^n|$ et $|\Psi^n|$ coïncident donc bien.

5. On conclut de la proposition précédente le moyen de *construire une surface ayant le comportement voulu le long de lignes-bases données*. Envisageons, dans un plan arbitraire passant par une droite fixe A, le système $|\Gamma_\alpha^n|$ complet de courbes d'ordre n ayant le comportement voulu aux points de rencontre du plan et des lignes-bases. Fixons une de ces courbes au moyen d'un certain nombre de points déterminés rationnellement en fonction du paramètre qui détermine la position du plan. Cette courbe, quand le plan tournera autour de A, engendrera une surface se comportant de la manière voulue le long des lignes-bases. Quant à l'ordre de cette surface, il pourra être supérieur à n, et sera égal à $n+k$, si la droite est une droite multiple d'ordre k de la surface.

6. Revenons aux *systèmes de courbes déterminés par l'intersection d'un système linéaire de surfaces avec un plan*. Nous allons démontrer le théorème suivant [1] :

Des lignes-bases étant données avec comportement donné, le système linéaire des surfaces d'ordre suffisamment élevé, passant avec le comportement voulu le long de ces lignes, découpe sur un plan général un système linéaire complet et régulier de courbes.

7. Commençons par établir un lemme relatif aux systèmes linéaires de courbes planes : Soient $|C^n|$ et $|C^{n+1}|$ deux systèmes *complets et réguliers,* d'ordres n et $n+1$, ayant les mêmes points-bases et le même comportement en ces points. On forme toutes les courbes C^{n+2} composées d'une C^{n+1} et d'une droite variable; nous allons montrer que *le système linéaire* $|C^{n+2}|$, *de dimension minimum contenant toutes ces courbes* C^{n+2}, *est le sys-*

(1) Ce théorème et la démonstration que nous en donnons sont dus à M. Castelnuovo [*Alcune proprietà fondamentali dei systemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica* (*Annali di Matematica*, 1897)].

tème complet d'ordre $n+2$ défini par les mêmes points-bases et les mêmes comportements en ces points que les systèmes primitifs.

Désignons par ρ_n, ρ_{n+1}, ρ_{n+2} les dimensions des trois systèmes $|C^n|$, $|C^{n+1}|$, $|C^{n+2}|$, et soient a et b deux droites du plan. Les courbes de $|C^{n+2}|$ qui passent par le point de rencontre de a et b forment un système de dimension $\rho_{n+2}-1$, qui contient, par hypothèse, les deux systèmes obtenus en réunissant d'une part les courbes de $|C^{n+1}|$ à la droite a, et d'autre part les courbes du même système $|C^{n+1}|$ à la droite b. Ces deux systèmes sont de dimension ρ_{n+1} et ont en commun le système de dimension ρ_n obtenu en réunissant les courbes de $|C^n|$ aux deux droites a et b. On a donc la relation

$$\rho_{n+2}-1 \geqq 2\rho_{n+1}-\rho_n.$$

Or, en désignant par k le nombre maximum de conditions auxquelles doit satisfaire une courbe algébrique pour passer avec le comportement voulu aux points-bases donnés, on a, puisque les systèmes $|C^n|$ et $|C^{n+1}|$ sont réguliers et complets,

$$\rho_n = \frac{n(n+3)}{2}-k, \qquad \rho_{n+1} = \frac{(n+1)(n+4)}{2}-k,$$

donc

$$2\rho_{n+1}-\rho_n = \frac{n^2+7n+8}{2}-k,$$

et par suite

$$\rho_{n+2} \geqq \frac{n^2+7n+8}{2}-k+1 \geqq \frac{(n+2)(n+5)}{2}-k.$$

Mais la dimension d'un système de courbes d'ordre $n+2$, ayant les points-bases et le comportement donnés, est au plus égal à $\frac{(n+2)(n+5)}{2}-k$, donc on doit avoir

$$\rho_{n+2} = \frac{(n+2)(n+5)}{2}-k,$$

et par suite le système $|C^{n+2}|$ est complet et régulier, puisque les deux premiers le sont. Notre lemme est établi.

De ce lemme résulte évidemment que, sous les hypothèses faites, le système de dimension minimum $|C^{n+r}|$ contenant le système obtenu en formant toutes les courbes composées d'une C^{n+1}

et d'une courbe d'ordre $r-1$ fixée arbitrairement est aussi complet.

8. Voici maintenant la démonstration du théorème fondamental énoncé au n° 6. Pour un groupe-base donné (lignes-bases et comportement), on peut choisir l'ordre n du système des surfaces assez élevé pour que les systèmes complets de courbes $|\Gamma^n|$ relatifs à un plan sécant arbitraire soient réguliers, et qu'il en soit de même pour les systèmes $|\Gamma^{n-1}|$ déterminés par les systèmes de surfaces d'ordre $n-1$, et il en sera de même pour les systèmes d'ordre supérieur. Cela posé, partons d'une position arbitraire, mais fixe, du plan α, et fixons dans ce plan une droite arbitraire g. Considérons le faisceau d'axe g et soit $|\Gamma^n|$ le système complet de courbes d'ordre n déterminé par les points-bases dans le plan α. On peut, comme nous l'avons vu, construire une surface Φ^{n+k}, ayant la droite g comme ligne multiple d'ordre k, qui se comporte de la manière voulue le long des courbes-bases données et dont l'intersection avec le plan α soit une courbe d'ordre n fixée à l'avance parmi les courbes du système $|\Gamma^n|$ correspondant.

Répétons la même construction en faisant varier dans le plan de départ aussi bien la droite g que la courbe Γ initiale. Nous obtiendrons ainsi une infinité de surfaces Φ^{n+k} qui appartiendront à un système linéaire complet $|\Phi^{n+k}|$. Toutes les surfaces de ce système se comportent de la manière voulue le long des courbes-bases et découpent sur le plan α un système linéaire de courbes d'ordre $n+k$, comprenant toute courbe composée d'une Γ^n et de la droite générale g comptée k fois.

En vertu du lemme précédent, ce système de courbes d'ordre $n+k$ est complet et régulier. Donc *le système complet* $|\Phi^{n+k}|$ *découpe sur le plan* α *un système complet de courbes*. La même chose a lieu *a fortiori* pour tout plan de l'espace et notre théorème est démontré.

9. Ces résultats peuvent s'étendre au cas *où il y a des points-bases isolés*. On peut, en effet, en partant d'une surface Φ qui se comporte de la manière voulue le long des courbes-bases données, construire une surface particulière qui satisfasse aux conditions imposées par les points-bases, par exemple en adjoignant

à Φ, pour chacun de ces points singuliers O, un cône de sommet O et d'ordre suffisamment élevé. De la sorte, en partant du système $|\Phi^{n+k}|$ obtenu précédemment, et faisant varier tous les éléments arbitraires, on obtient un système linéaire complet $|\Phi^m|$ de surfaces d'ordre $m > n + k$ qui découpe sur tout plan un système complet et régulier de courbes; on le voit par le même raisonnement.

10. Pour montrer l'intérêt du théorème précédent, indiquons des exemples de systèmes linéaires de surfaces qui ne découpent pas sur un plan un système complet et régulier de courbes.

Considérons toutes les surfaces du second degré passant par un groupe-base formé d'un cubique gauche et d'un point A extérieur à cette cubique. Elles dépendent de deux paramètres et déterminent, sur un plan arbitraire, un système de coniques qui n'est pas le système complet des coniques passant par les trois points où la cubique rencontre le plan, car elles doivent passer par un quatrième point fixe, le point double apparent de la perspective de la cubique sur le plan, avec le point de vue A.

Soit, en second lieu, le système des quadriques passant par huit points; elles déterminent, sur un plan arbitraire, un système de coniques dépendant d'un paramètre, qui n'est, par conséquent, pas le système complet des coniques du plan.

II. — Sur la dimension d'un système complet de surfaces (¹).

11. Considérons un système *complet* de surfaces d'ordre n, défini par des lignes-bases et des points-bases. Ce système $|\Phi^n|$ détermine, sur un plan général α, un système de courbes planes ayant un comportement déterminé aux points où α rencontre les lignes-bases. Ce système peut n'être pas complet; il est compris alors dans un système complet $|\Gamma^n|$ et il a un certain *défaut* ω_n. Le système $|\Gamma^n|$ peut ne pas être régulier : soit s_n sa *surabondance*. La dimension ρ_n du système $|\Gamma^n|$ sera

$$\rho_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 - k + s_n,$$

k ne dépendant pas de n. Alors le système $|\Phi^n|$ de surfaces dé-

---

(¹) *Voir* CASTELNUOVO (*Mémoire cité* au n° 6).

termine sur α un système de courbes dont la dimension est

$$\rho_n - \omega_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 - k + s_n - \omega_n.$$

Si l'on assujettit une surface Φ^n à passer par $\rho_n - \omega_n + 1$ points pris arbitrairement dans le plan α (en supposant cela possible), cette surface se décomposera en le plan α et une surface du système $|\Phi^{n-1}|$ défini par le même groupe-base. Si donc r_n et r_{n-1} désignent les dimensions des deux systèmes $|\Phi^n|$ et $|\Phi^{n-1}|$, on aura

$$r_{n-1} = r_n - (\rho_n - \omega_n + 1),$$

d'où

$$\text{(E)} \qquad r_n - r_{n-1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - k + s_n - \omega_n \qquad (s_n \geqq 0,\ \omega_n \geqq 0).$$

Dans le cas où le système $|\Phi^{n-1}|$ n'existerait pas, on aurait alors $r_n = \rho_n - \omega_n$, ce qui revient à poser, dans l'expression précédente, $r_{n-1} = -1$.

Cela posé, partons de la plus petite valeur de n pour laquelle $|\Phi^n|$ existe, et écrivons toutes les égalités (E). Quand n atteint une certaine valeur i, le système $|\Gamma^n|$ devient régulier, c'est-à-dire que s_n est toujours nul. Puis n continuant à croître, il arrive une valeur $l \geqq i$, à partir de laquelle on a *à la fois*, $s_n = 0$, $\omega_n = 0$, d'après le théorème fondamental, et alors on a

$$r_n - r_{n-1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - k \qquad (n \geqq l).$$

On a donc les égalités

$$\begin{aligned}
r_\alpha + 1 &= \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} - k + s_\alpha - \omega_\alpha,\\
r_{\alpha+1} - r_\alpha &= \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{2} - k + s_{\alpha+1} - \omega_{\alpha+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
r_{i-1} - r_{i-2} &= \frac{i(i+1)}{2} - k + s_{i-1} - \omega_{i-1},\\
r_i - r_{i-1} &= \frac{(i+1)(i+2)}{2} - k - \omega_i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
r_{l-1} - r_{l-2} &= \frac{l(l+1)}{2} - k - \omega_{l-1},\\
r_l - r_{l-1} &= \frac{(l+1)(l+2)}{2} - k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
r_n - r_{n-1} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} - k.
\end{aligned}$$

En ajoutant, *on obtient la formule très intéressante valable pour n supérieur ou égal à* $l-1$

$$\text{(A)} \qquad r_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 1 - kn + k',$$

où k' désigne une nouvelle constante (positive ou négative) qui, comme k, ne dépend pas de n. Ces deux constantes k et k' dépendent du groupe-base; mais, tandis que la recherche de k se ramène à un problème de Géométrie plane, la recherche de k', qui dépend à la fois des lignes-bases et des points-bases, est beaucoup plus difficile.

Comme exemple, considérons le cas particulier où le groupe-base se réduit à une courbe simple de degré d, de genre p, avec t points triples. Nous avons vu que le nombre des conditions pour qu'une surface d'ordre n suffisamment grand passe par cette courbe est égal à

$$nd - p - 2t + 1;$$

donc

$$r_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 1 - nd + p + 2t - 1,$$

et, par suite,

$$k = d, \qquad k' = 2t + p - 1.$$

12. Connaissant k et k', relatifs à un groupe-base donné, *la formule* (A) *ne donne la dimension du système des surfaces* $|\Phi^n|$ *que pour n suffisamment grand.*

Pour $n \geqq l-1$, la formule est exacte.

Pour $n < l-1$, il faut ajouter à la valeur (A) la différence

$$\sum_{h=n+1}^{h=l-1} \omega_h - \sum_{h=n+1}^{h=i-1} s_h,$$

et l'on a

$$\text{(A')} \qquad r_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 1 - kn + k' + \sum_{h=n+1}^{h=l-1} \omega_h - \sum_{h=n+1}^{h=i-1} s_h,$$

la première somme s'annulant à partir de $n = l-1$, et la seconde à partir de $n = i-1$.



III. — Du système linéaire des surfaces sous-adjointes [1].

13. Nous avons déjà défini les *surfaces sous-adjointes* à une surface donnée $f(x, y, z) = 0$. Une surface $\varphi(x, y, z) = 0$ est *sous-adjointe* à f, si une section plane *arbitraire* de f a pour adjointe la section plane correspondante de la surface φ.

L'ensemble des surfaces sous-adjointes à f d'un ordre donné forme évidemment un système linéaire de surfaces, dont la dimension peut être supérieure ou égale à zéro.

Il existe toujours des surfaces sous-adjointes d'ordre $r \geqq n - 1$, n étant l'ordre de la surface f, puisque telles sont les surfaces polaires des points de l'espace par rapport à f, jointes à une surface d'ordre $r - n + 1$.

14. Nous reportant à ce que nous avons dit relativement aux intégrables doubles de première espèce au Chapitre VII du premier Volume, on peut montrer que si φ est une sous-adjointe, l'intégrale double

$$\iint \frac{\varphi(x, y, z)\, dx\, dz}{f'_y} \tag{1}$$

est finie à distance finie, sauf peut-être en un certain nombre *limité* de points singuliers de la surface. Le seul point à établir est évidemment que cette intégrale reste finie en général le long des lignes multiples. Or, sur une ligne multiple, l'x d'un point est une fonction $a(z)$ de z holomorphe dans le voisinage d'une valeur γ, d'ailleurs arbitraire, de z. Cela posé, envisageant la section plane $f(x, y, \bar{z}) = 0$, l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(x, y, \bar{z})}{f'_y(x, y, \bar{z})}\, dx \tag{2}$$

relative à cette courbe restera finie au point multiple, intersection du plan $z = \bar{z}$ avec la ligne multiple, puisque φ est une

---

[1] Dans la définition des surfaces sous-adjointes, comme dans celle des surfaces adjointes qui sera donnée dans la Section suivante, nous nous plaçons à un point de vue transcendant entièrement différent du point de vue algébrique de M. Enriques.

adjointe. D'autre part, le quotient $\frac{\varphi}{f'_y}$ est susceptible, sur la surface, d'un certain nombre de développements suivant les puissances croissantes fractionnaires de $x - a(z)$, soit

$$\frac{\varphi}{f'_y} = A(x-a)^\alpha + \ldots.$$

On a évidemment $\alpha > -1$, puisque l'intégrale (2) doit rester finie, et les coefficients A sont des fonctions holomorphes de z. En posant

$$x = a(z) + u,$$

l'intégrale (1) devient

$$\iint (A u^\alpha + \ldots)\, du\, dz,$$

et, sous cette forme, on voit bien qu'elle reste finie autour du point $u = 0$, $z = \gamma$.

La réciproque est d'ailleurs immédiate. Si l'intégrale (1) reste finie *en général* le long de toute ligne multiple, la fonction φ définit une sous-adjointe; il faudra, en effet, que l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(x, y, \bar{z})}{f'_y(x, y, \bar{z})}\, dx$$

reste finie autour des points de rencontre du plan $z = \bar{z}$ avec la ligne multiple, sinon le nombre α, considéré plus haut, serait < -1, et l'intégrale double ne serait pas finie.

15. Nous avons défini les surfaces sous-adjointes à f par la condition que leurs sections, par des plans arbitraires généraux, soient des adjointes de la section correspondante sur f. On peut se borner, dans la définition, à *considérer seulement des sections planes passant par une droite arbitraire donnée.*

Soit A une droite occupant, par rapport à la surface, une position arbitraire, la coupant, par exemple, en des points distincts; on suppose qu'une surface ψ soit telle que sa section, par un plan général passant par A, soit une adjointe de la section correspondante de f. Il faut montrer qu'un plan général de l'espace coupe ψ suivant une adjointe de la section correspondante de f.

Ce théorème est évident pour les lignes multiples ordinaires.

Si, par exemple, la surface a une ligne multiple d'ordre μ, avec des plans tangents en général distincts, la surface ψ aura certainement cette ligne comme ligne multiple d'ordre $\mu - 1$, puisque les plans passant par A donnent des adjointes, c'est-à-dire des lignes avec points multiples d'ordre $\mu - 1$. La surface ψ admet donc, en un point général de la ligne multiple, $\mu - 1$ plans tangents, d'où la conclusion indiquée.

La proposition est moins immédiate si les lignes multiples sont de nature quelconque. On peut faire le raisonnement de M. Enriques, qui demanderait peut-être à être un peu plus développé.

Nous avons dit qu'il existait toujours des surfaces sous-adjointes d'ordre $r \geqq n - 1$, soit $r = n - 3 + \rho \geqq n - 1$. Considérons, d'une part, toutes les surfaces φ sous-adjointes d'ordre r, coupant de la manière voulue un plan général de l'espace, et, d'autre part, les surfaces ψ coupant de la manière voulue seulement un plan général passant par la droite A. Les surfaces φ et les surfaces ψ forment deux systèmes linéaires de surfaces, et le système ψ contient le système φ. Il faut montrer que ces deux systèmes coïncident. En effet, si l'on désigne par π le genre d'une section plane générale de f, et, par suite, d'une section plane passant par A, une surface φ coupe, en dehors des lignes multiples, la surface f suivant une ligne γ dont l'ordre est égal au nombre des points d'intersection de γ avec un plan arbitraire, qu'on peut supposer passer par A; ce nombre est égal à $2\pi - 2 + \rho n$, en vertu de l'hypothèse faite. Il est le même pour la courbe γ' d'intersection d'une surface ψ avec f. Les courbes γ et γ' sont donc de même ordre. Cela posé, un plan quelconque α coupant la surface f suivant une courbe K, coupera les φ suivant un système linéaire de courbes adjointes à K, et les ψ suivant un système linéaire qui contiendra le premier. Or, une courbe de l'un et l'autre système coupe K en $2\pi - 2 + \rho n$ points en dehors des points multiples. Ces points multiples absorbent donc le même nombre de points de rencontre avec K pour l'un et l'autre système, donc l'intersection des ψ par un plan arbitraire est une adjointe.

Dans le cas où l'ordre des φ serait $< n - 1$, il suffirait d'adjoindre à φ un nombre suffisant de plans arbitraires, de manière à avoir un ordre supérieur à $n - 1$, et de répéter le même raisonnement.

16. On peut donner, de la proposition précédente, une démonstration presque intuitive, avec les intégrales doubles.

On peut supposer que la droite A est à l'infini dans le plan xy; le faisceau de plans est alors $z =$ const. Soit un plan arbitraire qu'on peut prendre sous la forme $x = x_0$; l'intégrale

$$\int\int \frac{\varphi(x, y, z)\, dx\, dz}{f'_y}$$

reste finie en général le long des lignes multiples, puisque, par hypothèse, la courbe $\varphi(x, y, \bar{z}) = 0$ est une adjointe de la courbe $f(x, y, \bar{z}) = 0$. Or, l'intégrale précédente peut s'écrire sous la forme

$$\int\int \frac{\varphi(x, y, z)\, dy\, dx}{f'_z}:$$

elle est finie, en général, pour tout point à distance finie; donc l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(x_0, y, z)\, dy}{f'_z} \qquad (x_0 \text{ arbitraire})$$

relative à $f(x_0, y, z) = 0$ est finie pour le voisinage du point multiple considéré de la ligne multiple, et, par suite, la courbe $\varphi(x_0, y, z) = 0$ est une adjointe de la courbe $f(x_0, y, z) = 0$. Le plan $x = x_0$ pouvant être regardé comme un plan arbitraire de l'espace, le théorème est démontré.

17. La dimension d'un système linéaire $|\Phi_\nu|$ de surfaces sous-adjointes d'ordre ν s'obtiendra en appliquant la formule (A) du n° 11. Supposons qu'il s'agisse des surfaces dont l'ordre $\nu \geqq m - 3$, m étant l'ordre de la surface f. Le système des courbes planes déterminé par les $|\Phi_\nu|$ sur un plan général α peut ne pas être complet, mais il est certainement *régulier*, et l'on a par suite $\Sigma s_h = 0$. Soit π le genre d'une section plane de la surface, on aura

$$k = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \pi.$$

En désignant, comme précédemment, par $l \geqq m - 3$ le nombre à



partir duquel le système des courbes planes est complet, on a

$$r_\nu = \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{6} - 1 - k\nu + k' + \sum_{\nu+1}^{l-1} \omega_h,$$

en convenant que le terme $\Sigma\omega_h$ s'annule pour $\nu \geqq l-1$, et les ω_h étant les défauts relatifs aux systèmes des adjointes planes d'ordres $\nu+1$, $\nu+2$, ..., $l-1$. Dans cette formule, k' désigne une constante indépendante de ν.

IV. — Du système linéaire des surfaces adjointes et du genre numérique.

18. Le système des surfaces sous-adjointes est un système de surfaces dont le groupe-base ne contient que des lignes. Il est défini par le comportement d'une de ses surfaces le long des lignes multiples de la surface donnée $f(x, y, z) = 0$, de degré m, sans qu'il soit question des points multiples isolés, que peut posséder la surface, par lesquels une surface sous-adjointe arbitraire ne passera pas en général. Lors donc qu'on effectuera une transformation birationnelle, une surface sous-adjointe ne se transformera pas en une surface sous-adjointe, si, à la surface f, correspond une surface F, telle qu'à un point multiple isolé de f correspond sur F une courbe multiple d'ordre au moins égal à *deux*.

19. Envisageons maintenant les *surfaces adjointes d'ordre* $m-4$ que nous avons définies au Chap. VII du premier Volume, à propos des intégrales doubles de première espèce. Elles forment un système linéaire, désigné sous le nom de *système canonique*, de dimension $p_g - 1$,

$$|K| \qquad \alpha_1 q_1(x, y, z) + \alpha_2 q_2(x, y, z) + \ldots + \alpha_{p_g} q_{p_g}(x, y, z) = 0,$$

dans lequel chaque surface q d'ordre $m-4$ peut servir à former une intégrale double de première espèce

$$(1) \qquad \iint \frac{q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}.$$

Nous avons vu que le nombre p_g, *genre géométrique de la surface,* était un nombre invariant (t. I, p. 193), c'est-à-dire

qu'il est le même pour deux surfaces qui se correspondent birationnellement, et la même démonstration (t. I, p. 207) établit l'*invariance du système canonique*. Cette invariance est exprimée par l'identité

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha_1 q_1(x, y, z) + \ldots + \alpha_{p_g} q_{p_g}(x, y, z) \\ &\quad = \frac{f'_z}{F'_Z}\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}[\alpha_1 Q_2(X, Y, Z) + \ldots + \alpha_{p_g} Q_{p_g}(X, Y, Z)], \end{aligned}\right.$$

les Q étant les polynomes adjoints d'ordre $M - 4$ relatifs à la surface F, supposée de degré M.

Le système $|K|$ appartient évidemment au système des sous-adjointes d'ordre $m - 4$, mais avec des points-bases en plus. Ce système est défini par la condition que sa surface générale se comporte le long des lignes multiples de f comme une sous-adjointe, et aux *points multiples isolés* de manière qu'en ces points l'intégrale (I) reste finie. Cette dernière condition se traduit toujours d'ailleurs par un certain nombre de relations homogènes et linéaires entre les coefficients.

Nous sommes donc bien dans les conditions où nous nous sommes placés au début de ce Chapitre, relativement au comportement d'un système de surfaces le long de lignes-bases données et en des points-bases donnés.

20. Nous avons défini les surfaces adjointes d'ordre $m - 4$ au moyen des intégrales doubles de première espèce. Des considérations du même genre vont nous permettre, en restant toujours au point de vue transcendant, de définir les *surfaces adjointes,* à une surface donnée f, *d'ordre supérieur à* $m - 4$.

On peut d'abord, par une transformation préalable, faire en sorte que la surface f ne présente à l'infini aucune singularité isolée, c'est-à-dire que tous les points multiples *isolés* soient à distance finie. Cela posé, le polynome $q(x, y, z)$, d'ordre $m - 4 + r$, étant le plus général de son degré, envisageons l'intégrale double

$$\iint \frac{q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

et cherchons les conditions auxquelles ce polynome q doit satisfaire pour que cette intégrale reste finie et déterminée pour tout



point *à distance finie*. Nous arrivons d'abord à la conclusion que la surface $q(x, y, z) = 0$ doit se comporter le long des lignes multiples comme une sous-adjointe. Quant au comportement en un point multiple isolé O, que nous supposerons être l'origine des coordonnées, on mettra la fonction q sous la forme

$$\varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) + \ldots,$$

où φ_i désigne l'ensemble des termes homogènes de degré i, et effectuant alors successivement les transformations qui permettent de réduire la singularité, on arrivera nécessairement à un certain nombre de relations linéaires et homogènes entre les coefficients des φ jusqu'à un certain rang, et qui seront les mêmes, *quel que soit l'ordre* $m - 4 + r$ *de la fonction* q. Nous arrivons donc à cette conclusion que les surfaces adjointes forment un système linéaire de surfaces qui se comportent le long des lignes multiples comme les surfaces sous-adjointes et qui, en outre, aux points multiples isolés, se comportent d'une manière déterminée *indépendante de leur ordre*. Si donc *la surface* f *admet des adjointes d'ordre* $m - 4$, on pourra dire que les adjointes d'ordre $m - 4 + r$ ont le long des lignes multiples et aux points multiples isolés le même comportement que le système canonique $|K|$.

Remarquons que nous ne disons rien relativement au comportement des surfaces q à l'infini. En exprimant que l'intégrale (I) reste finie à l'infini, on retomberait sur les adjointes d'ordre $m - 4$.

En particulier, si la surface f n'a d'autres singularités que des courbes multiples *ordinaires* d'ordre i et des points multiples isolés *ordinaires* de l'ordre h, les surfaces adjointes sont déterminées par la condition d'avoir ces lignes comme lignes multiples d'ordre $i - 1$, et ces points comme points multiples d'ordre $h - 2$.

Le système adjoint et le système sous-adjoint peuvent coïncider. Cela a lieu, par exemple, lorsque la surface f ne possède pas de points multiples isolés, ou lorsque ces points sont d'ordre 2. Il en est de même pour une surface f qui possède une courbe double et, sur cette courbe, un certain nombre de points multiples isolés d'ordre h, qui soient d'ordre $\frac{h(h-1)}{2}$ pour la courbe double, par exemple un point triple de la courbe double.

21. Rappelons encore une remarque faite (t. I, p. 207) relative aussi bien aux sous-adjointes qu'aux adjointes. Ces surfaces, en dehors des lignes multiples et des points isolés qu'elles doivent contenir, peuvent encore, de ce fait, passer par certains points simples ou par certaines courbes simples de la surface, du moins tant que leur degré ne dépasse pas une certaine limite. Nous en avons donné des exemples. Voici, sur le même sujet, une *observation importante*.

Supposons que, considérant f et sa transformée F, il y ait sur f un point *fondamental,* c'est-à-dire un point simple de la surface qui se transforme en une courbe, *courbe exceptionnelle* (en général une droite) de la surface F. Soit la courbe A correspondant au point a. Nous allons démontrer que *toutes les adjointes d'ordre* $M-4$ *de* F *passent par* A. Supposons le point a à l'origine des coordonnées. Dans l'entourage de ce point, z est une fonction holomorphe de x et y. A un point de la courbe A correspond une valeur de $\frac{y}{x}$, et l'on aura

$$(\beta) \qquad \begin{cases} x = S(X, Y), \\ y = x\,P(X, Y) = S(X, Y)\,P(X, Y), \end{cases}$$

P et S étant holomorphes en X et Y dans le voisinage du point considéré de A, et S s'annulant pour les points de A. Partons alors de l'identité (α)

$$\alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_{p_g} q_{p_g} = \frac{f'_z}{F'_Z}\,\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}(\alpha_1 Q_1 + \ldots + \alpha_{p_g} Q_{p_g});$$

des équations (β) on déduit

$$\frac{D(x, y)}{D(X, Y)} = S\left(\frac{\partial P}{\partial X}\,\frac{\partial S}{\partial Y} - \frac{\partial P}{\partial Y}\,\frac{\partial S}{\partial X}\right),$$

et l'on en conclut que les adjointes $\alpha_1 Q_1 + \ldots + \alpha_{p_g} Q_{p_g} = 0$ passent bien par la courbe A.

22. De la définition que nous avons donnée des surfaces adjointes, on peut conclure que le *théorème du reste,* établi au Chap. I dans le cas des surfaces sous-adjointes, *s'étend aux surfaces adjointes*. En effet, les surfaces adjointes étant des sous-adjointes si l'on désigne par φ, ψ, χ trois adjointes dont la pre-



mière passe par deux groupes de courbes P et Q, la seconde par P et Q', la troisième par P' et Q, on a l'égalité

$$\psi(x, y, z)\chi(x, y, z) = \alpha(x, y, z)f(x, y, z) + \beta(x, y, z)\varphi(x, y, z).$$

Nous pouvons d'ailleurs supposer que l'adjointe φ ne se comporte pas d'une manière spéciale aux divers points singuliers isolés, c'est-à-dire qu'elle se comporte en chacun de ces points comme une adjointe arbitraire d'un degré suffisamment élevé. Cela posé, nous avons sur la surface, d'après l'identité précédente,

$$\psi(x, y, z)\chi(x, y, z) = \beta(x, y, z)\varphi(x, y, z).$$

La surface $\beta = 0$, qui est nécessairement une sous-adjointe, doit être de plus une adjointe. Pour montrer qu'il en est bien ainsi, envisageons un point singulier isolé A; on sait que le voisinage de ce point sur la surface peut être représenté par un certain nombre de développements où x, y, z sont des fonctions holomorphes de deux paramètres u et v dans le voisinage de $u = 0$, $v = 0$. Prenons l'un de ces développements, et considérons l'intégrale double

$$\iint \frac{\varphi(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}.$$

On peut écrire, en appliquant un théorème classique de Weierstrass sur la décomposition en facteurs d'une fonction de deux variables,

$$\frac{dx\,dy}{f'_z} = \frac{P(u, v)\,du\,dv}{Q(u, v)},$$

$Q(u, v)$ étant un *polynome* en u, dont les coefficients sont holomorphes en v dans le voisinage de $v = 0$; de plus, $P(u, v)$ et $Q(u, v)$ n'ont pas de facteur commun holomorphe en u et v, s'annulant pour $u = 0$, $v = 0$. D'autre part, soit

$$\varphi(x, y, z) = \Phi(u, v):$$

pour que l'intégrale reste finie, il faudra que $\Phi(u, v)$ contienne en facteur $Q(u, v)$. Avec plus de précision, si

$$Q(u, v) = [q_1(u, v)]^{\alpha_1} \ldots [q_m(u, v)]^{\alpha_m},$$

les q étant des polynomes en u irréductibles, Φ contiendra q_1,

$q_2, \ldots, q_m$ en facteur aux puissances respectives

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_m \qquad (\mu_1 \geqq \alpha_1, \ \ldots, \ \mu_m \geqq \alpha_m).$$

Les deux fonctions

$$\psi(x, y, z) = \Psi(u, v), \qquad \chi(x, y, z) = \mathrm{X}(u, v)$$

contiendront $q_1, q_2, \ldots, q_m$ *au moins* aux puissances respectives $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, et si l'on pose

$$\beta(x, y, z) = \mathrm{B}(u, v),$$

on déduit de l'identité

$$\Psi(u, v)\,\mathrm{X}(u, v) = \mathrm{B}(u, v)\,\Phi(u, v)$$

que $\mathrm{B}(u, v)$ contient $q_1, q_2, \ldots, q_m$ au moins aux puissances μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_m$ et, par suite, au moins aux puissances $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Or l'intégrale double

$$\iint \frac{\beta(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

pouvant s'écrire

$$\iint \frac{\mathrm{B}(u, v)\,\mathrm{P}(u, v)\,du\,dv}{\mathrm{Q}(u, v)},$$

restera alors finie pour le voisinage de A correspondant au développement considéré; il en est par suite de même des autres, et enfin nous pouvons conclure *que*

$$\beta(x, y, z) = 0$$

est une surface adjointe.

23. La dimension N_{m-4+r} d'un système linéaire de surfaces adjointes d'ordre $\nu = m - 4 + r$ est donnée, comme pour les sous-adjointes, par la formule

$$\mathrm{N}_\nu = \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{6} - 1 - k\nu + k'' + \sum_{\nu+1}^{l-1} \omega_h,$$

dans laquelle on a

$$k = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \pi,$$

π étant le genre d'une section plane de la surface, et k'' une constante indépendante de ν; en général, le nombre k'' est différent du

nombre k' qui se présentait dans la formule analogue relatif aux sous-adjointes.

Appliquant la formule (E) du n° 11, on a

$$N_{m-4+r+1}-N_{m-4+r}=\frac{(m-3+r)(m-2+r)}{2}-k-\omega_{m-4+r+1}$$
$$(r \geqq 0),$$

d'où, en tenant compte de la valeur de k, la relation qui nous sera bientôt utile

$$N_{m-4+r+1}-N_{m-4+r}=\pi+rm+\frac{r(r-3)}{2}-\omega_{m-4+r+1},$$

dans laquelle ω s'annule à partir d'une valeur suffisamment grande de r.

24. Considérons en particulier le cas des surfaces adjointes d'ordre $m-4$, la dimension N_{m-4} est alors égale au *genre géométrique* de la surface, p_g, diminué d'une unité ; on a donc

$$p_g-1=\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}-1-k\nu+k''+\sum_{h=m-3}^{h=l-1}\omega_h.$$

Introduisons maintenant un nouveau nombre p_n, que nous appellerons le *genre numérique de la surface*, et qui est défini par l'égalité

$$p_n-1=\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}-1-k\nu+k'';$$

on a la relation

$$p_g-p_n=\sum_{m-3}^{l-1}\omega_h,$$

qui, p_g étant déterminé, définit p_n, résultat que l'on énonce de la manière suivante :

La différence entre le genre géométrique et le genre numérique d'une surface f d'ordre m est égale à la somme des défauts des systèmes de courbes découpées sur un plan arbitraire par les surfaces adjointes à f d'ordre supérieur ou égal à $m-3$.

Pour établir l'invariance du genre numérique p_n, il suffira donc d'établir l'invariance de la somme $\sum\omega_h$. C'est une ques-

tion que nous traiterons dans un Chapitre suivant, après avoir fait l'étude des systèmes de courbes sur une surface.

L'égalité fondamentale

$$p_g - p_n = \sum \omega_h$$

a été introduite dans la théorie des surfaces par M. Enriques (1).

25. La surface est dite *régulière* quand on a $p_g = p_n$, et, dans ce cas, tous les défauts ω_{m-3}, ω_{m-2}, ... sont nuls.

Nous allons établir, avec M. Castelnuovo (2), que si $\omega_{m-3} = 0$ et $\omega_{m-2} = 0$, tous les autres ω seront nuls et par suite que la surface sera régulière. Dans cette hypothèse, les surfaces adjointes d'ordre $m-3$ et d'ordre $m-2$ déterminent sur un plan des systèmes $|\Gamma^{m-3}|$ et $|\Gamma^{m-2}|$ qui sont complets et réguliers, cette dernière propriété appartenant, comme nous l'avons vu, à toutes les adjointes à partir de l'ordre $m-3$. Faisons d'abord seulement l'hypothèse $\omega_{m-2} = 0$: on en conclut, en appliquant le lemme du n° 7, que le système composé d'une courbe Γ^{m-2} et d'une droite variable est complet. Or, une surface adjointe Φ^{m-1} coupe le plan suivant un système linéaire jouissant de la propriété précédente, puisque une Φ^{m-1} comprend en particulier une Φ^{m-2} et un plan; donc le système $|\Phi^{m-1}|$ découpe sur un plan arbitraire un système complet et régulier, et par suite

$$\omega_{m-1} = 0;$$

on démontrerait de même que tous les autres défauts sont nuls.

Ainsi de la seule hypothèse $\omega_{m-2} = 0$, *on conclut*

$$\omega_{m-1} = \omega_m = \ldots = 0.$$

Si donc *on fait à la fois l'hypothèse* $\omega_{m-3} = 0$ *et l'hypothèse* $\omega_{m-2} = 0$, on aura

$$\sum \omega = 0.$$

et *la surface sera régulière*.

(1) ENRIQUES, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (*Mem. della Societa italiana d. Scienze,* t. X; 1896).

(2) Mémoire cité au n° 6.

26. En réalité, M. Castelnuovo a établi (*loc. cit.*) que la condition $\omega_{m-3} = 0$ suffit pour qu'une surface soit régulière, c'est-à-dire que cette condition entraîne $\omega_{m-2} = 0$. Nous ne démontrerons pas cette élégante proposition et nous ferons seulement, en terminant, la remarque que *si* $\omega_{m-3} = 0$ *et si la section de* f *par un plan arbitraire est une courbe normale, la surface sera régulière.*

Nous avons vu (Chap. II, n° 24) qu'une courbe plane normale est une courbe telle que la série g_m^2 déterminée par les droites du plan soit complète. Soit donc une telle courbe que l'on peut supposer n'avoir que des points doubles, et soit d leur nombre. Nous avons vu que la courbe n'est certainement pas normale, si l'on a la relation

$$d > \frac{(m-3)(m-2)}{2}.$$

Nous ne pouvons donc que faire les deux hypothèses

$$d = \frac{m-3.m-2}{2}$$

ou

$$d < \frac{m-3.m-2}{2}.$$

Supposons d'abord qu'il n'y ait pas d'adjointe d'ordre $m-4$ ou qu'il n'y en ait qu'une seule, ce qui entraînera nécessairement

$$d = \frac{(m-3)(m-2)}{2}.$$

La dimension r_{m-3} des adjointes d'ordre $m-3$ est $\pi - 1$; soit r la dimension de la série *minimum* L, somme de g_m^2 et de $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$, on aura

$$r - 2 \geqq 2 r_{m-3}.$$

C'est ce qui résulte de la considération de la série minimum L, quand on l'assujettit à contenir deux points fixes A et B arbitrairement pris sur la courbe. Sa dimension est alors $r-2$. D'autre part, elle doit contenir la série linéaire de groupes de points obtenue avec les adjointes d'ordre $m-3$ passant par A et les droites passant par B, ce qui donne une série linéaire de dimension r_{m-3}; on peut avoir une seconde série en intervertissant le rôle des points

A et B. Les deux séries ainsi trouvées n'ont d'ailleurs pas de série linéaire commune, puisqu'il n'y a pas d'adjointe d'ordre $m-4$ ou qu'il n'y en a qu'une, ne dépendant pas par conséquent de paramètres arbitraires.

On a donc bien

$$r-2 \geqq 2 r_{m-3}.$$

Or

$$r_{m-3}=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-1-d,$$

donc

$$r \geqq 2m-4.$$

Mais la dimension du système complet des adjointes d'ordre $m-2$ est $\frac{(m-2)(m+1)}{2}-d$ ou $2m-4$. Donc r ne peut être supérieur à $2m-4$, et par suite

$$r=2m-4.$$

Le système minimum est donc le système complet. On en déduit que les surfaces adjointes d'ordre $m-2$ coupent le plan suivant le système complet : donc $\omega_{m-2}=0$.

Supposons maintenant qu'il y ait des adjointes d'ordre $m-4$, et en ayant toujours

$$d \leqq \frac{(m-3)(m-2)}{2};$$

la dimension de ce système d'adjointes sera

$$r=\frac{(m-3)(m-2)}{2}-d+\varepsilon,$$

ε étant supérieur ou égal à zéro suivant que le système n'est pas régulier ou est régulier. *Nous allons montrer que* $\varepsilon=0$.

La série $g^{r}_{2\pi-2-m}$ déterminée par les adjointes d'ordre $m-4$ est contenue dans la série canonique $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$: il existe par suite un système résiduel $g^{r'}_{m'}$; or, d'après la loi de réciprocité de Brill-Nœther, on a

$$2(r-r')=m-(2\pi-2-m)$$

ou

$$r-r'=m-\pi+1,$$

d'où l'on déduit, en tenant compte des valeurs de r et de π,

$$r'=2+\varepsilon.$$

Si donc ε n'était pas nul, la série g_m^2 ne serait pas complète, puisqu'il existerait un système $g_m^{r'}(r' > 2)$, la comprenant. La conclusion est la même que précédemment, le système des adjointes d'ordre $m - 4$ est *régulier*.

On peut appliquer alors le lemme fondamental en partant des adjointes d'ordre $m - 4$, et la démonstration est immédiate. Il faut seulement remarquer que, dans le cas de

$$d = \frac{(m-3)(m-2)}{2},$$

la condition $\varepsilon = 0$ nous apprend qu'il n'y a qu'une seule adjointe d'ordre $m - 4$, ce qui nous ramène au cas précédent.

CHAPITRE V.

DES SYSTÈMES LINÉAIRES DE COURBES SUR LES SURFACES.

I. — Remarques générales concernant les systèmes linéaires de courbes sur les surfaces.

1. Nous avons déjà parlé dans le premier Volume (Ch. VIII, § III) des systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface algébrique $f(x, y, z) = 0$. Nous nous sommes bornés alors à quelques remarques générales importantes que nous allons rappeler succinctement.

Un système linéaire $|C|$ de courbes sur la surface f se compose de l'ensemble des courbes d'intersection de la surface f avec le système linéaire des surfaces

$$|L| \qquad \alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_r L_r = 0.$$

Le système $|C|$ aura même *dimension* r que le système $|L|$, s'il n'existe aucune relation linéaire entre les L sur la surface f.

La courbe générale d'un système linéaire peut être réductible ou irréductible. Dans le cas où elle est réductible, elle se composera en général d'une partie fixe et d'une partie variable. Cette partie variable peut, elle-même, être réductible ou non : nous avons démontré que, si elle est réductible, elle se compose nécessairement des courbes d'un faisceau. Si la courbe variable générale est irréductible, elle peut d'ailleurs se décomposer pour certaines relations entre les paramètres α.

La courbe générale d'un système peut avoir aussi des points fixes, *points-bases*. On peut toujours supposer que ces points sont des points simples de la surface f, en effectuant une transformation convenable. Pour la courbe générale du système, ces points peuvent être simples ou multiples.

2. Lorsqu'on parle d'un système linéaire de courbes $|C|$ sur la surface f on ne considère en général que l'*ensemble des courbes variables*. Par *système irréductible* nous entendrons par conséquent un système dont la courbe variable générale est irréductible, sans nous occuper de la partie fixe, si elle existe. Dans certains cas il y a lieu pourtant, comme nous le verrons, de distinguer les *systèmes irréductibles avec ou sans partie fixe*.

Rappelons encore que la courbe variable d'un système ne peut pas avoir, en dehors des points-bases, des points multiples qui n'appartiennent pas aux lignes multiples de la surface f, et que les points variables d'intersection doivent décrire la surface tout entière. Le *degré* n du système est le nombre des points d'intersection variables de deux courbes générales du système : on a $r-1 \leqq n$, et, pour $r=1$, $n=0$. Cette définition du degré suppose naturellement que la dimension du système est supérieure ou égale à *un*, $r \geqq 1$.

Le système est *simple* si la condition de passer par un point de la surface n'entraîne pas, comme conséquence, pour les courbes du système, l'obligation de passer par d'autres points déterminés par le premier.

3. Disons quelques mots relativement aux *courbes fondamentales* d'un système. Cette notion nous sera utile dans le Chapitre suivant lorsque nous aborderons l'étude des courbes adjointes à un point de vue géométrique. On entend par *courbe fondamentale* d'un système $|C|$ une courbe qui n'impose qu'*une* condition aux courbes de ce système qui peuvent la contenir. Une courbe C assujettie à passer par un point arbitraire d'une courbe fondamentale doit la contenir tout entière, sauf le cas où ce point serait un point fixe du système $|C|$. Une courbe fondamentale n'est donc pas coupée en des points variables par la courbe générale du système, et réciproquement une courbe qui n'a, avec la courbe générale d'un système $|C|$, aucune intersection variable ne peut être qu'une courbe fondamentale pour ce système. Le système de toutes les courbes C qui contiennent une courbe fondamentale, c'est-à-dire ce que l'on appelle le *système résiduel* de la courbe fondamentale par rapport au système $|C|$, est de dimension $r-1$, si r est la dimension de $|C|$, comme il résulte de la définition

même. Ce système résiduel aura avec la courbe fondamentale des points d'intersection variables.

On dit qu'une courbe fondamentale est *propre* ou *impropre* suivant que le système résiduel de cette courbe par rapport à $|C|$ a un genre inférieur ou égal au genre π de la courbe générale C.

4. Rappelons encore qu'on donne le nom de *courbes exceptionnelles* aux courbes de la surface qui, par une transformation birationnelle, peuvent correspondre à des *points simples* de la surface transformée. Nous avons déjà eu occasion de considérer ces courbes dans le Chapitre précédent.

5. On peut, comme nous l'avons vu (T. I, Chap. VII), obtenir des transformées de la surface considérée au moyen des surfaces qui déterminent le système $|C|$, soit dans l'espace S_r, r étant la dimension de $|C|$, soit dans un espace de dimensions moindres. Ce sera, par exemple, dans l'espace S_r, la surface définie par

$$x_1 = \frac{L_1}{L_0}, \qquad x_2 = \frac{L_2}{L_0}, \qquad \ldots, \qquad x_r = \frac{L_r}{L_0}$$

ou, dans l'espace S_3, une surface définie par

$$X = \frac{L_1}{L_0}, \qquad Y = \frac{L_2}{L_0}, \qquad Z = \frac{L_3}{L_0}.$$

Les sections planes, ou hyperplanes, d'une transformée ainsi obtenue correspondent aux courbes C du système $|C|$. Nous aurons souvent à faire usage de pareilles transformations.

Si le système $|C|$ a des courbes fondamentales, à l'une de ces courbes correspondra, sur la surface F transformée que nous venons de définir, un point, en général multiple. Les sections hyperplanes passant par ce point correspondront au système résiduel de la courbe fondamentale par rapport à $|C|$. Leur genre sera donc inférieur ou égal à π suivant que la courbe fondamentale sera propre ou impropre.

6. Parmi les systèmes linéaires que l'on peut tracer sur une surface f, il y a lieu de distinguer en particulier ceux qui, étant simples et irréductibles, ne possèdent ni points-bases, ni courbes



fondamentales, et qui permettent de transformer la surface donnée en une surface sans singularités dans l'hyperespace, donc en une surface n'ayant que des singularités ordinaires dans l'espace à trois dimensions. La question de l'existence de pareils systèmes se rattache étroitement à celle de la réduction des singularités d'une surface algébrique (T. I, Chap. IV), que nous avons traitée précédemment. Que l'on envisage en effet les seize fonctions

$$P_i x, P_i y, P_i z, P_i t, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

qui nous ont servi (T. I, p. 79) pour transformer une surface f en une surface sans singularités dans l'espace à quinze dimensions, le système

$$\alpha_0 P_1 x + \alpha_1 P_2 x + \ldots + \alpha_{15} P_4 = 0$$

déterminera sur la surface primitive f un système qui n'aura pas de courbes fondamentales propres, puisque si l'une de ces courbes existait elle donnerait lieu à un point multiple.

Il n'est donc pas douteux, sans entrer dans les détails d'une démonstration minutieuse, qu'on peut toujours, en prenant des surfaces L, qui déterminent un système $|C|$ d'ordre suffisamment grand, faire en sorte que ce système soit simple, irréductible, sans point-base, sans courbes fondamentales, et qu'il permette de transformer la surface donnée en une surface sans singularités dans l'hyperespace, donc en une surface n'ayant que des singularités ordinaires (courbe double et points triples) dans l'espace à *trois* dimensions. Nous donnerons à un pareil système le nom de *système pur et non singulier*.

7. Faisons encore quelques remarques essentielles relativement aux transformations birationnelles. Lorsqu'on effectuera sur la surface f une transformation birationnelle, le système $|C|$ se transformera en un système $|C'|$; si le premier système est complet, le second le sera, et il est évident que les principaux caractères du système, à savoir sa dimension r, son degré n, et le genre π de la courbe générale C, supposée irréductible, seront des invariants. Une remarque pourtant est nécessaire relativement aux *courbes exceptionnelles,* courbes qui correspondent, sur la surface transformée f', à des points simples de f. Si à un point-base O de $|C|$

correspond une courbe exceptionnelle sur f', on ne devra pas considérer cette courbe comme faisant partie de la courbe transformée C' de C, en sorte que C' peut être regardée comme le lieu des points correspondants aux points de C, excepté le point O. Mais si le point de f qui donne lieu à une courbe exceptionnelle n'est pas un point-base de $|C|$, il faudra considérer cette courbe exceptionnelle comme faisant partie de la courbe C' transformée de la courbe C qui passe par ce point.

Ces définitions, au premier abord arbitraires, sont choisies, comme nous le verrons plus tard, de façon à pouvoir conserver à certains énoncés toute leur généralité.

8. Enfin, si l'on envisage sur la surface f deux systèmes $|C_1|$ et $|C_2|$, le nombre des points d'intersection variables d'une courbe C_1 et d'une courbe C_2 est aussi un invariant, et la série de groupes de points déterminée par toutes les courbes de $|C_2|$, par exemple, sur une courbe générale C_1 aura aussi ce caractère. Telle est, en particulier, la *série caractéristique* g_n^{r-1} d'un système $|C|$, qui est découpée sur une courbe C par toutes les autres courbes du système.

9. Donnons, avant d'approfondir l'étude des systèmes linéaires, la démonstration d'un théorème que nous n'avions fait qu'énoncer (T. I, p. 198) et qui va se présenter comme la conséquence presque immédiate de la proposition relative aux involutions établie au Chap. III, n° 13.

Il s'agit de montrer que, *sur une surface algébrique, un système algébrique de dimension k de courbes irréductibles qui est tel que par k points arbitraires ne passe qu'une seule courbe du système, forme nécessairement un système linéaire,* pourvu que k soit supérieur à *un*.

Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface S; en la coupant par un plan $z = z_0$, l'équation de la courbe d'intersection sera $f(x, y, z_0) = 0$. Le système algébrique envisagé déterminera sur cette courbe une involution, rentrant dans la catégorie de celles que nous avons étudiées. Elle pourra donc être obtenue par une équation linéaire telle que

$$\lambda_0 \varphi_0(x, y, \overline{z_0}) + \ldots + \lambda_k \varphi_k(x, y, \overline{z_0}) = 0,$$



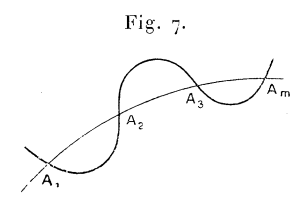
dans laquelle les φ peuvent *a priori* dépendre algébriquement de z_0. Mais alors, pour des λ arbitraires, en faisant varier z_0 et revenant à la valeur initiale, on pourrait obtenir une autre involution, et k points arbitraires de $f(x, y, \overline{z_0}) = 0$ appartiendraient à deux groupes. Les φ, ou du moins leurs rapports, contiennent donc z_0 rationnellement, et le système algébrique étudié se réduit bien à un système linéaire.

10. Le théorème précédent n'est pas toujours vrai pour $k = 1$, comme le montre l'exemple des surfaces réglées sur lesquelles il existe un système algébrique de génératrices, tel que par un point quelconque de la surface ne passe qu'une courbe génératrice, et qui, en général, n'est pas linéaire.

M. Humbert a montré, comme nous l'avons dit, que le théorème subsiste pour $k = 1$, lorsque la surface n'a pas d'intégrale de première espèce; et, d'après M. Castelnuovo, il subsiste pour les surfaces régulières ($p_g = p_n$), mais la démonstration de ces résultats nous entraînerait trop loin.

11. Le théorème établi au n° 9 est dû à M. Enriques; sa démonstration est d'une tout autre nature. Nous nous bornerons à la donner pour le cas de $k = 2$.

Fig. 7.



Soit m le nombre des points variables de rencontre de deux courbes quelconques du système. Toutes les courbes du système, passant par un point A_1, passeront par $m - 1$ autres points *déterminés* $A_2, \ldots, A_m$, car les $m - 1$ autres points de rencontre de deux courbes passant par A_1, ne peuvent être mobiles, sinon plus de deux courbes du système passeraient par deux points *arbitraires*.

Donc à chaque point de la surface f correspond un groupe bien

déterminé G_m de m points, et deux tels groupes déterminent une courbe C du système.

Aux groupes G_m, on peut faire correspondre uniformément une surface F, par exemple de la manière suivante : Soit

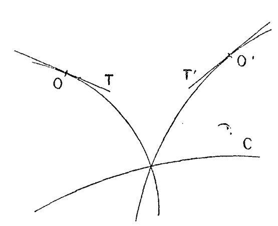
$$G_m(x, y, z;\ x_1, y_1, z_1;\ \ldots;\ x_{m-1}, y_{m-1}, z_{m-1})$$

un groupe arbitraire; prenons trois polynomes quelconques $R(x, y, z)$, $R_1(x, y, z)$, $R_2(x, y, z)$, et posons

$$\begin{aligned} X &= R(x, y, z) + R(x_1, y_1, z_1) + \ldots + R(x_{m-1}, y_{m-1}, z_{m-1}) = S(x, y, z), \\ Y &= R_1(x, y, z) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = S_1(x, y, z), \\ Z &= R_2(x, y, z) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = S_2(x, y, z). \end{aligned}$$

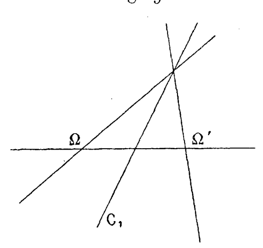
On fait correspondre ainsi à la surface f une surface $F(X, Y, Z)$. A chaque point de f correspond un point de F, et à chaque point

Fig. 8.



de F un groupe G_m de m points de f. Au système de courbes sur f correspond un système de courbes sur F, et ce second système est

Fig. 9.



déterminé d'une manière unique par deux points arbitraires; le degré de ce système est égal à *un*. Par suite, si l'on considère sur F deux faisceaux du système pivotant autour de O et O', il n'y aura qu'*un* point de rencontre : la surface F sera unicursale. Soient

α et β les coefficients angulaires des tangentes OT, O'T'. Les courbes du faisceau correspondent à $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$, c'est-à-dire à deux systèmes de droites pivotant autour de Ω et Ω'. Toute courbe C du réseau sur F sera déterminée par une relation homographique entre α et β, et comme la droite $\Omega\Omega'$ se correspond à elle-même, cette relation sera du premier degré et non fractionnaire. La courbe C a donc pour correspondante une droite

$$A\alpha + B\beta + C = 0,$$

d'où, sur la surface F, une équation de la forme

$$A\lambda(X, Y, Z) + B\mu(X, Y, Z) + C\nu(X, Y, Z) = 0.$$

Il suffit de remplacer X, Y, Z par leurs valeurs en x, y, z, et le théorème est démontré.

II. — Des systèmes complets.

12. Ces préliminaires étant posés, nous allons, pour faire l'étude des systèmes linéaires de courbes sur une surface f, suivre la même marche que pour les séries linéaires de groupes de points sur une courbe (Chap. II, p. 23). Soit donc un système linéaire quelconque de courbes $|C|$ défini sur la surface $f(x, y, z) = 0$ par le système de surfaces

$$(L) \qquad \alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_r L_r = 0.$$

Nous avons vu que le *théorème du reste relatif aux courbes s'étend aux surfaces*. En appliquant ce théorème, nous montrerons d'abord qu'*un système linéaire quelconque* $|C|$ *peut toujours être obtenu au moyen d'un système linéaire de surfaces sous-adjointes ou de surfaces adjointes d'un ordre suffisamment élevé,* assujetties, s'il est nécessaire, à passer par un certain nombre d'éléments fixes (courbes ou points) de la surface.

Soit C' une certaine courbe de $|C|$ déterminée par une surface L' de (L). Par C', faisons passer une sous-adjointe φ', ce qui sera toujours possible en prenant son degré assez élevé ; on obtient ainsi une courbe *résiduelle* Γ'.

Soit maintenant L une autre surface de (L) qui détermine une

courbe C du système : envisageons le produit

$$L\varphi',$$

qui s'annule pour C, C' et Γ'. Cette surface composée passe par l'intersection de f et L', et l'on a donc, en appliquant le théorème du reste,

$$L\varphi' = L'\varphi + \theta f.$$

D'où l'on déduit que φ est une sous-adjointe, passant par C et Γ', du même ordre que φ'. Par suite, on a, sur la surface S,

$$L_i\varphi' = L'\varphi_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

donc

$$\varphi'(\alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_r L_r) = L'(\alpha_0\varphi_0 + \ldots + \alpha_r\varphi_r),$$

les surfaces φ passant toutes par Γ'. Par conséquent, l'équation (L) peut être remplacée par l'équation

$$(\Phi) \qquad \alpha_0\varphi_0 + \ldots + \alpha_r\varphi_r = 0,$$

qui détermine comme la première sur S le système linéaire de courbes $|C|$.

Les surfaces sous-adjointes φ passent par les points-bases du système $|C|$, et elles ont, en ces points, avec la surface f des contacts qui dépendent du comportement des courbes du système. Si le système contient une partie fixe, elles passent par cette partie fixe.

13. Nous nous sommes servis de surfaces sous-adjointes, dans le raisonnement précédent; on peut tout aussi bien employer des surfaces adjointes, puisque le théorème du reste s'applique à ces surfaces. Il résulte d'ailleurs de l'égalité

$$L\varphi' - L'\varphi = 0,$$

que si φ' est une adjointe, il en est même de φ; on n'aurait qu'à reproduire les raisonnements faits au § 22 du Chapitre IV.

Dans la plupart des démonstrations qui vont suivre, on pourra indifféremment employer l'un ou l'autre des deux systèmes de surfaces.

14. Une notion importante est celle de *système complet*.



Soient $|C|$ et $|C'|$ deux systèmes, que nous supposerons d'abord irréductibles, ayant les mêmes points-bases et même comportement en ces points. Si la courbe générale C' du second est une courbe *totale* du premier, et si la dimension du premier est supérieure à celle du second, ce second système $|C'|$ sera dit *contenu totalement* dans le premier. Ces deux systèmes ont évidemment même degré.

Cela posé, un système linéaire irréductible de degré $n (n > 0)$ est *complet* ou *normal,* relativement au degré, *s'il n'est pas contenu totalement dans un autre système irréductible,* de même degré et à un plus grand nombre de dimensions.

15. Démontrons maintenant un théorème fondamental [1] : *Si un système linéaire irréductible n'est pas complet, il existe un système complet et un seul, qui le contient totalement.*

Soit C' une courbe générale d'un système linéaire irréductible $|C'|$. *Tout* système linéaire contenant totalement C' est déterminé par des adjointes d'un certain ordre ν, passant par une courbe résiduelle Γ, et se comportant en outre d'une manière convenable aux points-bases de $|C'|$. Si donc l'on considère *toutes* les adjointes d'ordre ν, linéairement indépendantes, ainsi spécifiées, on obtiendra un certain système linéaire $|C|$ de dimension $r \geqq r'$, défini par

$$\alpha_0 \varphi_0 + \ldots + \alpha_r \varphi_r = 0,$$

dont le degré sera le degré n du système $|C'|$. Le système proposé $|C'|$ est nécessairement contenu dans le système $|C|$, s'il ne coïncide pas avec lui, et tout système contenant totalement $|C'|$ et par suite C' sera aussi contenu totalement dans $|C|$. *Le système* $|C|$ *est donc le système normal ou complet cherché; il est complètement déterminé et unique.*

Ce système complet ne dépend ni de l'ordre des adjointes φ employées, ni de la courbe C' du système $|C'|$ d'où l'on part.

16. Donnons quelques exemples de systèmes complets.

---

(1) Ce théorème paraît avoir été établi pour la première fois par M. Enriques (Mémoire cité de la Société italienne des XL), mais sa démonstration est assez compliquée. L'emploi du lemme du n° 12 rend au contraire le théorème pour ainsi dire intuitif.

Toutes les surfaces adjointes ou sous-adjointes d'un même ordre déterminent un système complet de courbes.

On obtient encore un système complet en assujettissant ces surfaces à passer par des points ou des courbes assignés à l'avance sur f avec un comportement donné, et en *retranchant* ensuite les courbes fixes des courbes du système.

Une courbe C, avec points-bases et comportements donnés, suffit pour déterminer un système complet.

Pour le construire, on fera passer par cette courbe une adjointe Φ d'ordre ν. Soit Γ la courbe résiduelle. Toutes les adjointes Φ d'ordre ν passant par Γ et ayant aux points-bases donnés, avec la surface f, le comportement donné, détermineront le système.

Un faisceau irréductible ($n = 0$, $r = 1$) est toujours normal.

Sur une surface générale d'ordre donné, les sections planes déterminent un système complet; et il en est de même sur une surface qui n'a pas de lignes multiples.

D'une manière plus générale, si une surface est telle que, sur une section plane arbitraire, les droites du plan déterminent sur la courbe une série g_m^2 complète, les sections planes de la surface formeront un système complet.

Considérons en effet une section plane arbitraire C. Nous devons faire passer par C une adjointe. Prenons, par exemple, une adjointe d'ordre $\nu + 1$ formée par le plan P de C et une adjointe arbitraire d'ordre ν qui coupe la surface f suivant une courbe Γ, en dehors des lignes multiples. Il nous faut envisager toutes les adjointes d'ordre $\nu + 1$ passant par Γ : elles coupent toute section plane en m points variables, m étant l'ordre de f, et ces points doivent être en ligne droite, car autrement ces groupes de m points formeraient une série linéaire contenant la série g_m^2 déterminée par les droites du plan, qui alors ne serait pas complète.

De là, on conclut que la courbe γ d'intersection des adjointes précédentes d'ordre $\nu + 1$ avec la surface f est nécessairement d'ordre m et qu'elle est telle qu'un plan quelconque la rencontre en m points en ligne droite. La courbe γ est donc plane et la proposition est démontrée.

Comme exemple de surfaces à sections planes formant un système incomplet, citons la surface réglée du troisième ordre, laquelle admet une droite double.

17. Soit encore, sur une surface, un système complet, simple, de dimension r et de degré n, défini par

$$\alpha_0 L_0 + \ldots + \alpha_r L_r = 0.$$

Nous avons vu qu'on peut faire correspondre à la surface f dans l'espace à r dimensions une surface f' définie par

$$x_1 = \frac{L_1}{L_0}, \qquad \ldots, \qquad x_r = \frac{L_r}{L_0}.$$

Cette surface est d'ordre n, et elle est *normale*, en ce sens qu'elle ne peut être la perspective d'une surface du même ordre située dans un espace à un plus grand nombre de dimensions.

Une surface normale intéressante du quatrième degré dans l'espace à *cinq* dimensions est la *surface de Véronèse*, définie par les équations

$$x_1 = \frac{L_1}{L_0}, \qquad \ldots, \qquad x_5 = \frac{L_5}{L_0},$$

où les L représentent six polynômes du second degré en α et β. Cette surface correspond au système linéaire de toutes les coniques du plan.

III. — De l'addition des systèmes complets.

18. Définissons ce qu'on entend par *système normal somme de deux systèmes donnés*, en supposant toujours que ces deux systèmes soient *irréductibles*.

Soient deux systèmes $|C_1|$ et $|C_2|$ *irréductibles* et *complets* définis respectivement par les deux systèmes de surfaces

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_r P_r = 0,$$
$$\beta_0 Q_0 + \beta_1 Q_1 + \ldots + \beta_{r'} Q_{r'} = 0.$$

Le système

$$(1) \qquad \sum \lambda_{j,k} P_j Q_k = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots, r')$$

définit un système *irréductible* qui contient totalement toutes les courbes composées $C_1 + C_2$, mais qui peut ne pas être complet. Envisageons alors le système complet $|C|$ défini par une courbe



C_1+C_2, ayant comme points-bases les points-bases de $|C_1|$ et de $|C_2|$, de telle sorte qu'un point-base d'ordre λ_1 pour $|C_1|$ et d'ordre λ_2 pour $|C_2|$ soit de l'ordre $\lambda_1+\lambda_2$ pour $|C|$. Ce système complet $|C|$ est, par définition, la somme des deux systèmes donnés et on le désigne par la notation

$$|C| = |C_1+C_2|.$$

Il est complètement déterminé par une courbe C_1 et par une courbe C_2 et, en plus, par les points bases des deux systèmes et le comportement spécifié en ces points.

19. On définit de même un système somme de plusieurs systèmes donnés. Soient $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$ trois systèmes. Leur somme sera désignée par le symbole

$$|C| = |C_1+C_2+C_3|,$$

et il résulte de la définition même qu'on peut, pour la former, effectuer d'abord la somme de $|C_1|$ et de $|C_2|$ et ajouter $|C_3|$, qu'on peut intervertir l'ordre des opérations, et remplacer un des systèmes par la somme des systèmes qui peuvent le composer.

Un système double d'un autre $|C|$, qu'on désigne par la notation $|2C|$ est le système $|C+C|$.

Un système multiple d'ordre k de $|C|$, soit $|kC|$, est la somme de k systèmes égaux à $|C|$.

20. Évaluons le degré du système $|C|$: ce sera celui du système (1), c'est-à-dire le nombre des points d'intersection variables de deux courbes composées telles que C_1+C_2. Si n_1 et n_2 sont les degrés respectifs de $|C_1|$ et $|C_2|$, et si i est le nombre des points variables de rencontre d'une courbe C_1 et d'une courbe C_2, on aura évidemment pour le degré n cherché de $|C|$

$$(\alpha) \qquad n = n_1+n_2+2i.$$

21. Une autre relation importante est celle qui lie entre eux les genres des systèmes $|C_1|$ et $|C_2|$ et du système somme $|C|$. On l'obtient de la manière suivante :



Soient π_1 et π_2 les genres respectifs des deux systèmes $|C_1|$ et $|C_2|$, q_1 le degré d'une courbe C_1 et q_2 le degré d'une courbe C_2 sur la surface f; soient en outre λ_1 et λ_2 les ordres respectifs d'un même point-base pour les deux systèmes.

Effectuons la perspective de deux courbes C_1 et C_2 et d'une courbe C sur un plan arbitraire. On aura pour la perspective de la courbe C_1

$$\pi_1 = \frac{(q_1 - 1)(q_1 - 2)}{2} - h_1 - k_1 - \sum \frac{\lambda_1(\lambda_1 - 1)}{2},$$

h_1 étant la part provenant des points multiples situés sur les lignes multiples de la surface f, et k_1 le nombre des points doubles apparents.

On aura de même pour la courbe C_2

$$\pi_2 = \frac{(q_2 - 1)(q_2 - 2)}{2} - h_2 - k_2 - \sum \frac{\lambda_2(\lambda_2 - 1)}{2}.$$

La courbe C, étant déterminée par une surface appartenant au système de surfaces adjointes dont l'une détermine la courbe composée $C_1 + C_2$, son degré sera égal à $q_1 + q_2$; elle aura comme points multiples provenant des lignes multiples un nombre de points équivalent à $h_1 + h_2$ points doubles, et ceux provenant des points-bases seront d'ordre $\lambda_1 + \lambda_2$; quant aux points doubles apparents, leur nombre sera égal à $k_1 + k_2 + H$, en désignant par H le nombre des points doubles apparents provenant des droites qui, passant par le point de vue, rencontrent à la fois C_1 et C_2. Par suite, on aura

$$\pi = \frac{(q_1 + q_2 - 1)(q_1 + q_2 - 2)}{2} - h_1 - h_2 - k_1 - k_2 - H - \sum \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)}{2}.$$

D'ailleurs, si l'on désigne par i le nombre des points mobiles de rencontre d'une C_1 et d'une C_2, on a évidemment

$$q_1 q_2 = H + i + \sum \lambda_1 \lambda_2.$$

Des relations précédentes, on déduit de suite

$$(\beta) \qquad \pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1.$$

C'est la relation que nous avions en vue [1].

22. Les définitions que nous avons données précédemment de *système complet* et de *système somme,* et les formules qui s'y rapportent, sont relatives à des systèmes irréductibles bien déterminés, dont la dimension, par conséquent, est au moins égale à *un,* sans tenir compte de la partie fixe qui se trouve appartenir alors à la courbe résiduelle que nous avons désignée par Γ. Il y a lieu de voir comment les définitions précédentes devront être modifiées lorsque les systèmes envisagés ne peuvent plus être considérés comme irréductibles.

Tout d'abord, s'il s'agit des systèmes réductibles, sans partie fixe, c'est-à-dire composés des courbes d'un faisceau, on peut, comme pour les systèmes irréductibles, définir un système complet. La notion de système complet somme de deux autres s'ensuit immédiatement, si les deux systèmes ne sont pas relatifs au même faisceau, c'est-à-dire différents. Le système défini par l'équation (1) du n° 18 est alors irréductible, et il existe un système irréductible normal $|C_1 + C_2|$, somme des systèmes donnés, et dont le degré est égal à $2i$, i étant toujours le nombre des points de rencontre variables d'une courbe C_1 et d'une courbe C_2. Si, au contraire, les systèmes $|C_1|$ et $|C_2|$ sont tous les deux composés des courbes d'un même faisceau, le système (1) est réductible, et le système somme peut n'être plus irréductible.

IV. — Addition d'un système complet à une courbe fixe ou à un point.

23. Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un système irréductible avec partie fixe, qu'on peut représenter par la notation

$$C_0 + |C_1|,$$

---

[1] Cette relation est identique à celle que l'on rencontre dans la théorie des systèmes linéaires de courbes planes. Elle a été étendue aux courbes sur les surfaces par M. Enriques qui a fait usage à cet effet de considérations assez délicates sur la connexion des surfaces de Riemann; la vérification directe est immédiate, comme le montre le calcul qu'on vient de lire.



dans laquelle C_0 désigne la partie fixe et $|C_1|$ l'ensemble des courbes irréductibles.

Par *système complet contenant totalement le système précédent,* nous entendrons le système le plus ample ayant la courbe composée $C_0 + C_1$ comme courbe totale, et comme points-bases les points-bases de $|C_1|$, sans rien spécifier relativement à la courbe C_0. Pour construire ce système, il suffit par $C_0 + C_1$ de faire passer une adjointe Φ d'ordre ν suffisamment élevé; soit Γ la courbe résiduelle en dehors de $C_0 + C_1$; l'ensemble des adjointes d'ordre ν passant par Γ et ayant, avec la surface f, aux points-bases de $|C_1|$, le comportement voulu, déterminera ce système d'une manière unique. On peut le représenter par $|C_0 + C_1|$, C_0 étant supposé un système de dimension *zéro,* sans points-bases. Il est évident que dans ce cas le degré du système complet n'est pas le même en général que celui du système proposé.

Le système $|C_0 + C_1|$ peut d'ailleurs être réductible ou irréductible. C'est ainsi que le système de toutes les surfaces adjointes d'ordre $m - 4$, qui passent toujours par les courbes exceptionnelles de la surface f, détermine un système complet qui sera réductible si ces courbes existent.

La définition du système somme s'étend d'elle-même. $|C_1|$ et $|C_2|$ étant deux systèmes quelconques réductibles ou non, la somme $|C_1 + C_2|$ est le système complet le plus ample ayant comme points-bases les points-bases des parties variables de $|C_1|$ et de $|C_2|$ avec leur comportement.

Remarquons enfin que les formules (α) et (β), qui donnent le degré et le genre d'un système somme, dans le cas où les systèmes composants sont irréductibles, ne peuvent pas en général être appliquées sans modifications.

24. Donnons encore quelques explications relativement à l'opération qui consiste à *ajouter un point* à un système linéaire de courbes. Cette locution est fréquemment employée dans les Mémoires de M. Enriques; toutefois, l'éminent géomètre ne nous paraît pas avoir explicitement donné la véritable origine de cette opération.

Envisageons sur la surface f un système linéaire irréductible simple et complet $|C|$ défini par le système de surfaces

$$\alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_r L_r = 0,$$

les surfaces L_i étant des surfaces générales du système, ce que l'on peut toujours supposer. Soit O un point simple de f qui soit un point-base d'ordre λ du système $|C|$, et pour simplifier nous admettrons que ce point-base soit unique. Effectuons la transformation birationnelle

$$x' = \frac{L_1}{L_0}, \qquad y' = \frac{L_2}{L_0}, \qquad z' = \frac{L_3}{L_0},$$

qui admettra le point O comme point fondamental. A la surface f d'ordre m va correspondre une surface f' d'ordre n, si n est le degré du système $|C|$; au système $|C|$ va correspondre le système $|C'|$ des sections planes de f', qui n'aura pas de points-bases; au point O correspondra, comme on le voit facilement, une courbe unicursale Ω d'ordre λ, qui n'aura pas, en général, de points multiples. Cela posé, par une courbe C' et par Ω faisons passer une surface adjointe Φ' d'ordre ν', qui coupe la surface f' suivant une courbe résiduelle Γ', et envisageons le système de *toutes* les adjointes d'ordre ν' passant par Γ'; elles déterminent un système complet $|C' + \Omega|$ de courbes dont le genre π' se détermine par la formule (β) : si π est le genre des courbes C et C', comme la courbe Ω est de genre *zéro*, on aura

$$\pi' = \pi + \lambda - 1.$$

De plus, la courbe générale de ce système coupe une courbe C' en $n + \lambda$ points, et le système $|C'|$ est déterminé par celles des adjointes Φ' qui contiennent Ω.

Au système $|C' + \Omega|$ correspond sur f un système complet que l'on désigne par la notation symbolique

$$|C + O|,$$

et qu'il est facile de définir. Remarquons d'abord que les courbes C sont des courbes particulières quelconques de ce système, bien qu'elles ne soient pas des courbes générales. De plus, ce système ne peut pas avoir d'autres points-bases, s'il en a, que le point O, puisque, sur f', le système $|C' + \Omega|$ n'a pas de points bases; sa courbe générale doit couper une courbe C en $n + \lambda$ points variables, et son genre doit être égal à $\pi + \lambda - 1$. Cela posé, par une courbe C faisons passer une adjointe Φ d'ordre ν, et soit Γ la



courbe résiduelle. Le système $|C+O|$ sera défini par l'ensemble des adjointes Φ d'ordre ν passant par Γ et qui se comportent au point O de telle sorte que la courbe générale d'intersection coupe une courbe C en $n+\lambda$ points variables, ce qui exige *que le point* O *soit pour cette courbe générale d'intersection un point multiple d'ordre* $\lambda-1$ *et non moindre,* puisque, s'il était d'ordre $\lambda-2$, il y aurait $n+2\lambda$ points d'intersection variables. Le genre de cette courbe est d'ailleurs bien égal à $\pi+\lambda-1$, et ce système contient les courbes C comme courbes particulières.

Il résulte de là que le système $|C+O|$, sur f, est le système des courbes de même ordre que les courbes C, et ayant comme points-bases les points-bases de $|C|$, *mais avec un degré de multiplicité inférieur d'une unité.* Si donc le point O est de multiplicité *un* pour $|C|$, il ne sera pas point-base pour $|C+O|$.

Revenant au système $|C'+\Omega|$ sur f', on en conclut encore que ce système coupe Ω en $\lambda-1$ points au moins.

Pour évaluer le degré n_1 du système $|C+O|$, on remarquera que le nombre *total* des points d'intersection de deux courbes C est égal au nombre *total* des points d'intersection de deux courbes $|C+O|$; on aura donc

$$n+\lambda^2=n_1+(\lambda-1)^2,$$

d'où

$$n_1=n-1+2\lambda.$$

Cette valeur est celle que l'on déduirait de la relation (α) en attribuant au point O ou à la courbe Ω un degré égal à -1.

25. De la définition précédente, on conclut celle du système qu'on représente symboliquement par

$$|C+O^\rho| \qquad (\rho \leqq \lambda).$$

Soit d'abord le système $|C+O^2|$: on formera le système $|C+O|=C_1$, et le système $|C+O^2|$ sera par définition le système $|C_1+O|$. On définira de même $|C+O^3|$ et ainsi de suite.

On en déduit que le système $|C+O^\rho|$, sur f, est le système des courbes de même ordre que les courbes C, ayant comme points-bases les points-bases de $|C|$, mais avec un degré de multiplicité égal à $\lambda-\rho$.

Le degré et le genre du système $|C + O\rho|$ se déterminent de suite. On a

$$n_\rho = n + 2\lambda\rho - \rho^2,$$

et

$$\pi_\rho = \pi + \lambda\rho - \frac{\rho(\rho+1)}{2}.$$

Pour $\rho = \lambda$, ces deux formules donnent

$$n_\lambda = n + \lambda^2,$$
$$\pi_\lambda = \pi + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}.$$

V. — Soustraction des systèmes complets ; systèmes résiduels.

26. Nous avons défini précédemment ce que l'on devait entendre par système contenu totalement dans un système donné. Nous allons définir maintenant ce que l'on entend par *système contenu partiellement dans un système donné*.

Soit d'abord un système $|C|$ irréductible et complet défini par des adjointes Φ qui passent par une courbe résiduelle Γ et ont, en outre, avec la surface f des comportements convenables en certains points. Une courbe C_1 qui n'est pas une courbe totale de système $|C|$, mais par laquelle on peut faire passer au moins une surface Φ, sera dite une *courbe partielle* du système ; il existe alors au moins une courbe résiduelle C_2 de $|C|$ par rapport à C_1, telle que la courbe composée $C_2 + C_1$ soit une courbe C ; l'ensemble des courbes C_2 forme un système qui est le *résiduel* de C_1 par rapport à $|C|$, ce que l'on exprime par la notation symbolique

$$|C_2| = |C| - C_1.$$

Envisageons maintenant deux systèmes irréductibles et complets $|C|$ et $|C_1|$ telles que la courbe générale de $|C_1|$ soit une courbe partielle de $|C|$, on dira que *le système* $|C_1|$ *est contenu partiellement dans* $|C|$. Quelques explications sont nécessaires pour bien préciser cette définition. Nous avons défini ce que l'on entend par système somme $|C|$ de deux systèmes donnés $|C_1|$ et $|C_2|$

$$|C| = |C_1 + C_2|$$

et il résulte de cette définition que chacun des systèmes $|C_1|$ et $|C_2$



est contenu partiellement dans $|C|$ et que chacun d'eux est le résiduel d'une courbe arbitraire de l'autre par rapport à $|C|$. Nous avons défini aussi ce que l'on devait entendre par système

$$|C| = |C_1 + O^\rho|, \qquad (\rho \leqq \lambda),$$

O étant un point-base d'ordre λ pour $|C_1|$: dans ce cas, bien que la courbe C_1 soit une courbe totale de $|C|$, le système $|C_1|$ sera dit contenu partiellement dans $|C|$, parce que la courbe générale de $|C_1|$ n'est pas une courbe générale de $|C|$, et $|C_1|$ sera dit le système résiduel de O^ρ par rapport à $|C|$.

Dans le premier de ces deux cas, le système $|C_1|$ n'a pas d'autres points-bases que ceux de $|C|$, et avec une multiplicité au plus égale ; dans le second, il a un point-base avec une multiplicité supérieure. D'une manière générale le système $|C_1|$ peut avoir des points-bases qui ne soient pas bases pour $|C|$, ou des points-bases communs avec multiplicité différente, et la courbe générale de $|C_1|$ peut être une courbe totale de $|C|$. De ces explications, il résulte que de l'égalité

$$|C_2| = |C| - C_1$$

on ne peut pas, en général, déduire

$$|C| = |C_1 + C_2|,$$

mais que, réciproquement, si la seconde égalité peut être posée, on peut, comme conséquence, écrire la première, ce qui a lieu dans les deux cas spécifiés plus haut. Nous verrons tout à l'heure comment on peut modifier cette représentation symbolique de manière à comprendre tous les cas.

27. Démontrons maintenant, relativement aux systèmes linéaires irréductibles contenus partiellement dans un autre, un théorème complètement analogue au théorème démontré au Chap. II, n° 7, relatif aux séries linéaires de groupes de points sur une courbe.

Soit un système linéaire irréductible $|C|$ défini par

$$(\varphi) \qquad \alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_r\varphi_r = 0$$

où les φ sont des adjointes d'un certain ordre passant par une courbe

résiduelle Γ, et par des points-bases avec, en ces points, le comportement convenable. Soit $|C_1|$ un second système complet irréductible contenu partiellement dans $|C|$. Il existe, par conséquent, des surfaces du système (φ) qui passent par une courbe donnée de $|C_1|$, soit C'_1, et par les points-bases de ce système avec le comportement voulu. Toutes ces surfaces déterminent un système linéaire complet $|C'_2|$, résiduel de C'_1 par rapport à $|C|$. Nous allons démontrer que *ce système résiduel* $|C'_2|$ *est indépendant de la courbe* C'_1 *de* $|C_1|$ *choisie*.

Soit $|C''_2|$ le système résiduel d'une seconde courbe C''_1 de $|C_1|$ par rapport à $|C|$.

Il suffit évidemment de montrer que Γ, C'_1 et une courbe C''_2 sont sur une même adjointe du système (φ). Or, le système $|C|$ est déterminé par les adjointes φ passant par Γ et une courbe C'_2. Les trois groupes de courbes ci-dessous sont donc respectivement, par définition, sur une même adjointe φ,

$$\begin{array}{llll}
(\Gamma,\ C'_2,\ C'_1) & \text{ou} & (\Gamma,\ C'_2) & \text{et}\quad C'_1, \\
(\Gamma,\ C'_2,\ C''_1) & \text{ou} & (\Gamma,\ C'_2) & \text{et}\quad C''_1, \\
(\Gamma,\ C''_2,\ C''_1) & \text{ou} & (\Gamma,\ C''_2) & \text{et}\quad C''_1.
\end{array}$$

Par suite, en appliquant le théorème du reste, on en conclut que (Γ, C''_2) et C'_1 sont sur une même adjointe, donc que le système résiduel de C'_1 par rapport à $|C|$ est le même que le système résiduel de C''_1 par rapport à $|C|$; c'est ce que nous voulions établir.

En représentant par $|C_2|$ sans accent, le système résiduel, on pourra écrire symboliquement

$$|C_2| = |C| - C_1 = |C - C_1|.$$

28. Il résulte aussi de la démonstration précédente, qu'une courbe C_1 et une courbe C_2 étant sur une surface adjointe $|\varphi|$, la courbe composée $C_1 + C_2$ est une courbe totale de $|C|$, et que les points-bases pour $|C|$ qui ne sont pas points-bases pour $|C_1|$ sont bases pour $|C_2|$ avec le degré de multiplicité voulu. La somme $|C_1 + C_2|$ différera donc du système $|C|$, en ce que le premier système a, en outre des points-bases du second, les points-bases de $|C_1|$ non bases pour $|C|$. Désignant par A ces points et par μ

leur degré de multiplicité, et nous reportant à ce que nous avons dit relativement à l'addition d'un point, on voit que l'on peut écrire

$$|C| = |\overline{C_1 + \Sigma A^\mu} + C_2|$$

et en déduire

$$|C_2| = |C - C_1 - \Sigma A^\mu|.$$

29. Des raisonnements analogues à ceux que nous avons faits au n° **21** montrent alors sans difficulté comment les relations (α) et (β) doivent être modifiées. En désignant par n, n_1, n_2 les degrés respectifs des trois systèmes et par π, π_1, π_2 leurs genres, on a

$$(\alpha') \qquad n = n_1 + n_2 + 2i + \Sigma \mu^2,$$

$$(\beta') \qquad \pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1 + \Sigma \frac{\mu(\mu - 1)}{2}.$$

30. Faisons encore une remarque dont nous aurons à faire usage dans la suite. Soit $|C|$ un système linéaire irréductible ayant des points-bases O de multiplicité λ. Nous avons vu que ce système pouvait être déterminé au moyen d'un système de surfaces adjointes ou sous-adjointes. On fait passer par une courbe C une adjointe φ d'ordre ν qui détermine une courbe résiduelle Γ, et l'on envisage parmi *toutes* les adjointes d'ordre ν qui passent par Γ celles qui se comportent en O de telle sorte que l'intersection avec la surface donnée ait en ce point un point multiple d'ordre λ. Laissant de côté cette dernière condition, *toutes* les adjointes d'ordre ν qui passent par Γ déterminent un système linéaire, soit $|L|$, qui, si l'ordre ν est pris suffisamment élevé, est irréductible, n'a pas de points-bases, et est ce que l'on appelle un *système pur*. Le système $|L|$ contient partiellement le système $|C|$, et l'on a

$$|L| = |C + \Sigma O^\lambda|$$

ou

$$|C| = |L - \Sigma O^\lambda|.$$

Ainsi on peut, et d'une infinité de manières, considérer *un système irréductible* $|C|$ *comme le système résiduel de ses points-bases par rapport à un système pur.*

Plus généralement on peut, et d'une infinité de manières, trouver un système pur $|L|$ contenant partiellement le système $|C|$ et, en désignant par $|C_1|$ le système résiduel de $|C|$ par rapport à $|L|$, on

aura

$$|L| = |C + C_1 + \Sigma O^\lambda|$$

ou

$$|C| = |L - C_1 - \Sigma O^\lambda|.$$

31. Terminons ce Chapitre par une observation importante. Les expressions symboliques dont nous avons fait usage et que nous emploierons encore dans la suite *ne sont qu'un moyen de simplifier le langage et de résumer par un symbole une série d'opérations faites sur des systèmes linéaires de courbes. Elles n'ont de valeur qu'autant que l'on a reconnu auparavant que ces opérations ont un sens et qu'elles sont possibles.* Il est donc important de ne jamais leur faire subir une modification sans se reporter aux définitions. Donnons quelques exemples :

Nous avons vu que de l'égalité

$$|C_2| = |C| - C_1,$$

on ne peut, en général, pas conclure à l'égalité réciproque

$$|C| = |C_1 + C_2|.$$

Il faut, pour passer de la première égalité symbolique à la seconde, vérifier auparavant que les points-bases de $|C|$ se composent des points bases de $|C_1|$ et des points-bases de $|C_2|$ avec le comportement convenable.

Soit encore le système défini par

$$|C_1| = |C - O^\lambda|$$

où O est un point base d'ordre λ pour $|C|$. On le forme en faisant passer par une courbe C une surface adjointe d'ordre ν; soit Γ la courbe résiduelle. Le système $|C_1|$ est défini par l'ensemble des surfaces adjointes d'ordre ν, passant par Γ, et par les points bases de $|C|$ avec un comportement convenable, sauf le point O. Or, il peut se faire que, de ces conditions, résulte pour ces surfaces adjointes la nécessité d'avoir le point O comme point-base, et alors le symbole précédent n'a pas de signification.

Considérons encore le cas où quatre systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$, $|C_4|$ seraient tels que le système somme $|C_1 + C_2|$ serait équivalent au système $|C_3 + C_4|$, en sorte que l'on peut écrire symboli-

quement

$$|C_1 + C_2| = |C_3 + C_4|.$$

On ne peut en déduire l'égalité

$$|C_1 - C_3| = |C_4 - C_2|$$

que si l'on sait, par ailleurs, que le système $|C_1|$ contient partiellement $|C_3|$, ce qui peut ne pas avoir lieu.

Ces quelques exemples suffiront pour montrer quelles précautions il faut apporter quand on fait usage des expressions symboliques, constamment employées par M. Enriques dans son Mémoire déjà plusieurs fois cité (*Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche,* 1896).

CHAPITRE VI.

DU SYSTÈME ADJOINT A UN SYSTÈME LINÉAIRE DE COURBES ET DU GENRE NUMÉRIQUE.

I. — Du système adjoint à un système linéaire sur les surfaces de genre géométrique supérieur à zéro.

1. Nous nous proposons dans ce Chapitre de définir le *système adjoint* à un système linéaire de courbes sur une surface, et d'étudier ses propriétés. Cette opération d'*adjonction* joue un rôle fondamental dans la théorie des systèmes linéaires de courbes sur une surface. Des relations qui existent entre un système et son adjoint nous déduirons, en particulier, l'invariance du genre numérique d'une surface.

2. Voici d'abord une définition générale : soit sur la surface $f(x, y, z) = 0$ d'ordre m un système linéaire irréductible $|C|$ de genre π et de degré n ; on donne le nom de *courbes sous-adjointes d'ordre* $n - 3 + r$ au système $|C|$ aux courbes qui jouissent de la propriété de couper une courbe générale C en un groupe de points appartenant à une série $g_{2\pi-2+rn}$.

Cela posé, envisageons en premier lieu le cas où le *système* $|C|$ est celui des *sections planes de la surface f*. Le système des surfaces sous-adjointes d'ordre $m - 3 + r$ découpe sur cette surface un système de courbes sous-adjointes d'ordre $m - 3 + r$ au système $|C|$, et nous démontrerons plus tard que réciproquement toute courbe sous-adjointe d'ordre $m - 3 + r$ au système des sections planes appartient à ce système. Parmi ces sous-adjointes, les plus intéressantes sont celles d'ordre $m - 3$, et parmi ces dernières, celles qui sont découpées par les *surfaces adjointes* d'ordre $m - 3$ constituent le *système adjoint* proprement dit au système $|C|$ des sections planes de f. Ce système est évidemment

compris dans le système sous-adjoint d'ordre $m-3$ et peut coïncider avec lui, si les systèmes des surfaces adjointes et sous-adjointes coïncident.

3. Avant de définir le *système adjoint à un système linéaire irréductible* $|C|$ quelconque sur la surface f, rappelons la définition du *système canonique*.

Le système canonique $|K|$ sur une surface est déterminé par le système des surfaces canoniques, c'est-à-dire par le système des surfaces adjointes d'ordre $m-4$. Ce système peut être réductible : nous avons vu, en effet, qu'il contenait certainement comme partie fixe l'ensemble des courbes *exceptionnelles* de la surface f. Sa courbe variable pourrait être elle-même réductible et se décomposer, par suite, en un certain nombre de courbes d'un même faisceau. Ce dernier cas donne lieu à des observations intéressantes, comme nous l'avons vu au Chapitre VIII du Tome I.

4. Soit maintenant $|C|$ un système linéaire donné sur la surface f, que nous supposerons complet, irréductible, *simple*, de genre π supérieur à zéro, et de degré n. Nous aurons plus tard quelques restrictions à faire sur ce système. Considérons le système de surfaces qui détermine $|C|$, soit

$$\alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_r L_r = 0 \tag{1}$$

les surfaces L étant des surfaces arbitraires du système, ce que l'on peut toujours supposer. Envisageons un système quelconque à trois dimensions, tel que

$$\alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 = 0, \tag{2}$$

et effectuons la transformation

$$x' = \frac{L_1}{L_0}, \qquad y' = \frac{L_2}{L_0}, \qquad z' = \frac{L_3}{L_0}. \tag{3}$$

A la surface f d'ordre m va correspondre une surface f' d'ordre n. Au système (2) correspondront les sections planes de f', et au système (1) le système complet $|C'|$ contenant ces sections planes.

Sur la surface f' le système $|C'|$ a un système adjoint $|C'_a|$ dé-

terminé par les surfaces adjointes d'ordre $n-3$. Le système $|C_a|$ correspondant sur f à $|C'_a|$ est, par définition, le *système adjoint au système* $|C|$.

5. Le système adjoint, ainsi défini, dépend d'une opération effectuée sur *une* surface-image ; d'où une certaine indétermination apparente, et une difficulté pour établir les relations d'invariance qui existent, sur la surface f, entre un système et son adjoint. On conçoit donc l'intérêt qu'il y a à modifier cette définition de manière à ne faire dépendre le système adjoint *que d'opérations effectuées sur la surface même*. On y arrive facilement dans le cas où la surface donnée f a un genre géométrique p_g *différent de zéro*. C'est ce que nous supposerons tout d'abord dans la suite des théorèmes que nous allons établir. Nous nous réservons de traiter ensuite le cas où le genre géométrique p_g de la surface est *nul*.

6. Commençons par démontrer l'importante proposition suivante : *Une courbe canonique arbitraire* K *sur* f *découpe sur la courbe générale d'un système irréductible* $|C|$ *un groupe de points qui, ajouté à un groupe de la série caractéristique de* $|C|$ *et aux points-bases de* $|C|$, *comptés avec leur degré de multiplicité, constitue un groupe de la série canonique* $g_{2\pi-2}$, π *étant le genre d'une courbe* C.

Soit $|K'|$ le système canonique de la surface f', image de f effectuée au moyen de la transformation (3), et soit O un point-base multiple d'ordre λ du système $|C|$. A ce point correspond sur f', comme nous le savons, une courbe exceptionnelle Ω, unicursale et de degré λ, qui est coupée en λ points par une courbe C' image de C. Le système $|K'|$, déterminé par les adjointes d'ordre $n-4$ à f', contient comme partie fixe les courbes Ω; on peut le considérer comme la somme $|\Sigma\Omega+K''|$ des courbes Ω et d'une partie résiduelle $|K''|$ qui peut avoir ou ne pas avoir de partie fixe. D'autre part, il résulte de la relation d'invariance qui existe entre les surfaces adjointes d'ordre $m-4$ à f et les surfaces adjointes d'ordre $n-4$ de la transformée f' que le système $|K|$ sur f correspond au système $|K''|$ sur f'.

D'ailleurs les points de rencontre d'une K' et d'une C' sont, dans le plan de C', sur une adjointe d'ordre $n-4$, et ces points,

avec n points en ligne droite, c'est-à-dire avec les points de rencontre de deux C', sont sur une adjointe d'ordre $n-3$ à C'. Ils forment, par conséquent, un groupe spécial de $2\pi - 2$ points.

Revenant alors à la surface f, le groupe spécial que nous venons de définir correspondra aux points de rencontre de K et de C, aux points-bases comptés chacun avec leur degré de multiplicité et aux points de rencontre variables de deux courbes C, d'où la proposition énoncée.

7. Nous sommes en mesure maintenant de définir le *système adjoint* $|C_a|$ *au système* $|C|$, sur la surface f, par une série d'opérations effectuées sur cette surface même, sans recourir à une surface-image. Dans ce but remarquons que, sur la surface f', la courbe composée $C' + K'$, ou $C' + \Sigma\Omega + K''$, déterminée par un plan et une adjointe d'ordre $n-4$, est sur une adjointe d'ordre $n-3$ à f'; donc la somme $|C' + K'|$, ou la somme $|C' + \Sigma\Omega + K''|$, est le système adjoint à $|C'|$, comme il résulte de la définition d'un système somme, et à ce système $|C'_a|$ correspond sur f le système adjoint $|C_a|$ à $|C|$. Or, pour effectuer la somme $|C' + \Sigma\Omega + K''|$, on peut, d'après ce que nous avons dit au Chapitre précédent (Chap. V, nº 14), effectuer d'abord la somme $|C' + \Sigma\Omega|$ et lui ajouter $|K''|$, ce qui, sur la surface f, revient à considérer le système $|C + \Sigma O|$ et à lui ajouter le système $|K|$. Le premier de ces deux systèmes n'est autre que le système des courbes de *même ordre* que les courbes C, sur la surface f, et ayant comme points-bases les points-bases de $|C|$, mais avec un degré de multiplicité inférieur d'une unité, le second système est le système canonique de la surface f.

Le système adjoint $|C_a|$ est donc la somme de ces deux systèmes. *Il a nécessairement, d'après cette définition, comme points-bases d'ordre* $\lambda - 1$ *tout point-base d'ordre* λ *de* $|C|$ et, en outre, les points-bases de $|K|$ avec leur degré de multiplicité, si ce dernier système en possède. On pourra donc représenter symboliquement le système adjoint par la formule

$$|C_a| = |C + \Sigma O + K| \qquad (\alpha)$$

qui résume toutes les opérations qu'il faut effectuer sur la surface f pour l'obtenir.

8. De cette définition des adjointes, exprimées par la relation symbolique (α), nous allons déduire une série de conséquences importantes.

En vertu du théorème de l'addition, le système $|C_a|$ étant la somme des deux systèmes $|C + \Sigma O|$ et $|K|$, chacun de ces systèmes est le système résiduel de $|C_a|$ par rapport à l'autre. Nous pouvons donc énoncer le résultat précédent de la manière suivante :

Sur toute surface de genre géométrique différent de zéro, tout système linéaire irréductible, qui admet un système adjoint, est contenu dans cet adjoint et, le système résiduel d'un système par rapport à son adjoint est le système canonique.

Ce résultat peut être exprimé par l'égalité symbolique

$$|K| = |C_a - C - \Sigma O|.$$

9. Soient $|C_1|$ et $|C_2|$ deux systèmes irréductibles et $|C|$ leur somme

$$|C| = |C_1 + C_2|.$$

En effectuant les opérations définies par l'égalité (α), on a

$$|C_a| = |C_1 + C_2 + \Sigma O_1 + \Sigma O_2 + K|,$$

O_1 étant un point-base de $|C_1|$ et O_2 un point-base de $|C_2|$. Remplaçant successivement $|C_1 + \Sigma O_1 + K|$ et $|C_2 + \Sigma O_2 + K|$, qui sont les systèmes adjoints à $|C_1|$ et à $|C_2|$, par $|C_{1a}|$ et $|C_{2a}|$, on en conclut

$$|C_a| = |C_{1a} + C_2 + \Sigma O_2| = |C_{2a} + C_1 + \Sigma O_1|,$$

d'où ce *théorème fondamental* au point de vue où se place M. Enriques :

Si $|C_1|$ *et* $|C_2|$ *sont deux systèmes linéaires irréductibles de courbes sur une surface, le système* $|C_{1a}|$ *adjoint au premier, additionné au second* $|C_2|$, *donne un système* $|C_{1a} + C_2|$ *qui est contenu dans le système adjoint* $|C_a|$ *à* $|C|$ *et en diffère seulement en ce que tout point-base d'ordre* λ *pour* $|C_2|$ *et non pour* $|C_1|$ *est d'ordre* λ *pour* $|C_{1a} + C_2|$ *et d'ordre* $\lambda - 1$ *pour* $|C_a|$.



10. Soit encore $|C_1|$ un système irréductible, et A un de ses points-bases d'ordre μ, le système défini par

$$|C_1 + A^\mu| = |C|$$

est le système des courbes du *même* ordre que C_1 sur f, mais avec le point base A en moins. Le système adjoint à $|C|$ différera donc du système adjoint à $|C_1|$ en ce que le second admet le point-base A avec un degré de multiplicité $\mu - 1$ et que le premier n'admet pas ce point comme point-base ; on pourra donc écrire

$$|C_a| = |C_{1a} + A^{\mu-1}| \qquad \text{et} \qquad |C_{1a}| = |C_a - A^{\mu-1}|.$$

11. Les opérations précédentes sont relatives à l'addition. Supposons maintenant qu'un système $|C_1|$ soit contenu partiellement dans un système $|C|$: ce système, comme nous le savons, peut avoir des points-bases A d'ordre μ qui ne soient pas bases pour $|C|$. Soit $|C_2|$ le système résiduel de $|C|$ par rapport à $|C_1|$,

$$|C_2| = |C| - C_1.$$

Nous avons vu que le système $|C|$ n'est pas égal à la somme $|C_1 + C_2|$ en général, mais à la somme du système $|C_1 + \Sigma A^\mu|$ et du système $|C_2|$,

$$|C| = |C_1 + \Sigma A^\mu + C_2|;$$

Soit B les points-bases de $|C_2|$, c'est-à-dire les points-bases de $|C|$ qui ne sont point bases pour $|C_1|$. On aura alors, en appliquant le théorème de l'addition,

$$|C_a| = |(C_1 + \Sigma A^\mu)_a + C_2 + \Sigma B| = |C_{1a} + \Sigma A^{\mu-1} + C_2 + \Sigma B|,$$

d'où

$$|C_{1a}| = |C_a - \Sigma A^{\mu-1} - C_2 - \Sigma B|.$$

II. — Sur une inégalité fondamentale relative à un système contenu partiellement dans un autre.

12. Le système adjoint $|C_a|$ détermine sur une courbe générale du système $|C|$ une série de groupes de points appartenant à la série canonique $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$, mais qui peut ne pas être complète. Désignons par $\delta(C)$ son défaut *qui va jouer dans la suite un rôle capital*. La dimension de cette série sera alors

$$\pi - 1 - \delta(C),$$

et c'est aussi la dimension de la série déterminée sur la courbe plane C', image de C sur la surface-image f' de f dont le système des sections planes correspond à $|C|$, par le système $|C'_a|$ ou, ce qui revient au même, par les surfaces adjointes d'ordre $n-3$ à cette surface f'.

La dimension du système $|C_a|$ ou du système $|C'_a|$ est évidemment égale à la dimension de ce système de surfaces adjointes. Cherchons quelle est son expression en fonction de la dimension $\pi - 1 - \delta(C)$ de la série précédente.

Il suffit de remarquer que, si l'on assujettit une surface adjointe d'ordre $n-3$ à passer par $\pi - \delta(C)$ points pris arbitrairement sur la courbe plane C' de f', en supposant cela possible, cette surface se décomposera en le plan de C' et en une surface adjointe d'ordre $n-4$ que nous supposons exister. Or, p_g étant le genre géométrique de la surface, la dimension du système canonique est $p_g - 1$, et l'on a, par conséquent, pour dimension du système des surfaces adjointes d'ordre $n-3$, ou du système adjoint $|C_a|$ de $|C|$, l'expression

$$p_g - 1 + \pi - \delta(C).$$

13. *Soient* $|C|$ *et* $|C_1|$ *deux systèmes linéaires irréductibles sur la surface* f, *et soient* $\delta(C)$ *et* $\delta(C_1)$ *les défauts des séries déterminées sur une courbe* C *et sur une courbe* C_1 *par leurs systèmes adjoints respectifs. Si* $|C_1|$ *est contenu partiellement dans* $|C|$, *on a*

$$\delta(C) \geq \delta(C_1).$$

Cet important théorème se démontre de la manière suivante : Soient $|C_2|$ le système résiduel de $|C_1|$ par rapport à $|C|$, π_2 son genre, i le nombre des points de rencontre d'une C_1 et d'une C_2 en dehors des points-bases, A, B et μ ayant les mêmes significations qu'au nº **11**. On a

$$|C| = \left|C_1 + C_2 + \sum A^{\mu}\right|,$$

$$|C_a| = \left|C_{1a} + C_2 + \sum A^{\mu-1} + \sum B\right|,$$

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1 + \sum \frac{\mu(\mu-1)}{2}.$$



Remarquons tout d'abord que si l'on considère le système

$$|C'| = |C - \Sigma A^{\mu}|,$$

dont le système adjoint $|C'_a|$ est défini par

$$|C'_a| = |C_a - \Sigma A^{\mu-1}|,$$

le défaut $\delta(C')$ correspondant au système $|C'|$ est égal au défaut $\delta(C)$ correspondant au système $|C|$: on le vérifie de suite. Substituant le système $|C'|$ au système $|C|$, on a alors les relations

$$|C'| = |C_1 + C_2|,$$
$$|C'_a| = |C_{1a} + C_2 + \Sigma B|,$$
$$\pi' = \pi_1 + \pi_2 + i - 1,$$

la dimension du système adjoint $|C'_a|$ étant

$$p_g + \pi' - 1 - \delta(C),$$

et celle du système $|C_{1a}|$

$$p_g + \pi_1 - 1 - \delta(C_1).$$

Or le système $|C'_a|$ étant la somme des deux systèmes $|C_{1a}|$ et $|C_2 + \Sigma B|$, le système $|C_{1a}|$ est le résiduel de $|C'_a|$ par rapport à $|C_2 + \Sigma B|$, c'est-à-dire, d'après le théorème démontré (Chap. V, n° 22), le résiduel de $|C'_a|$ par rapport à une courbe arbitrairement choisie parmi celles du système $|C_2 + \Sigma B|$ et, par conséquent, par rapport à une courbe C_2, puisque, ν désignant le degré de multiplicité des points B, le système $|C_2 + \Sigma B|$ est, par définition, le plus ample système ayant les points B comme points-bases d'ordre $\nu - 1$ et que, par conséquent, une courbe C_2 est une courbe totale de ce système.

La dimension du système $|C_{1a}|$ sera alors égale à la dimension du système $|C'_a|$ diminuée du nombre des conditions qu'il faut imposer à une courbe C'_a pour qu'elle contienne une courbe C_2. Ce dernier nombre est égal à la dimension augmentée d'une unité de la série de groupes de points découpés sur une courbe C_2 par le système $|C'_a|$. Or, une courbe C'_a coupe une courbe $C_1 + C_2$ en $2\pi' - 2$ points en dehors des points multiples, et elle coupe une courbe C_1 en $2\pi_1 - 2 + i$ points, ce nombre étant égal au nombre des points d'intersection de la courbe composée $C_{1a} + C_2 + \Sigma B$

qui définit le système $|C'_a|$ et la courbe C_1 ne passant pas par les points B. La série déterminée par le système $|C'_a|$ sur C_2 est donc de degré

$$2\pi' - 2 - (2\pi_1 - 2 + i) = 2\pi_2 - 2 + i.$$

C'est une série non spéciale, qui peut avoir un défaut ε et dont la dimension est, par suite,

$$\pi_2 - 2 + i + \varepsilon.$$

On a donc l'égalité

$$p_g + \pi_1 - 1 - \delta(C_1) = p_g + \pi - 1 - \delta(C) - (\pi_2 - 1 + i + \varepsilon),$$

d'où

$$\delta(C) = \delta(C_1) + \varepsilon.$$

et le théorème est démontré.

III. — Maximum du défaut de la série découpée sur la courbe générale d'un système par son système adjoint.

14. Envisageons sur la surface f le système irréductible $|C|$ et ses différents multiples

$$|2C|, \quad |3C|, \quad \ldots, \quad |rC|, \quad \ldots.$$

A chacun de ces systèmes, soit $|rC|$, correspond un système adjoint $|(rC)_a|$ qui est défini sur la surface f par l'égalité symbolique

$$|(rC)_a| = |rC + K + \Sigma O|.$$

Mais, en vertu du théorème fondamental de M. Enriques, puisque

$$|(rC)| = |C + (r-1)C|,$$

on peut, pour définir le système adjoint à $|(rC)|$, écrire

$$|(rC)_a| = |C_a + (r-1)C|.$$

A ce système correspond, sur la surface-image f' dont le système des sections planes $|C'|$ correspond à $|C|$, le système

$$|(rC')_a| = |C'_a + (r-1)C'|,$$

et comme une courbe $C'_a + (r-1)C'$ est déterminée par une sur-

face adjointe d'ordre $n-3$ et par une surface arbitraire d'ordre $r-1$, on en conclut que le *système tout entier est défini sur la surface f' par le système des surfaces adjointes d'ordre $n-4+r$.*

15. Désignons par $\delta(rC)$ le défaut de la série des groupes canoniques déterminés sur la courbe générale de $|rC|$ par son système adjoint. Le système $|rC|$ étant contenu partiellement dans $|(r+1)C|$, on a, en vertu du théorème du n° 13,

$$\delta[r+1)C] \geqq \delta(rC),$$

c'est-à-dire que le nombre positif $\delta(rC)$, s'il n'est pas nul, ne décroît pas quand r augmente. Nous nous proposons de démontrer que *le défaut $\delta(rC)$, lorsque r augmente, atteint un maximum,* donc que, pour r suffisamment grand, on a l'égalité

$$\delta[(r+1)C] = \delta(rC).$$

Nous venons de voir que le système adjoint $|(rC)_a|$ était défini sur la surface transformée f' par le système des surfaces adjointes d'ordre $n-4+r$ à f'. Soit N_{n-4+r} la dimension de ce système de surfaces; la dimension du système $|(rC)_a|$ sera, si $r>4$, égale à ce nombre diminué de la dimension du système de ces surfaces qui contiennent f' et qui sont de la forme $\theta f'$, θ étant un polynome arbitraire en x, y, z d'ordre $r-4$. Donc, la dimension du système $|(rC)_a|$ est

$$N_{n-4+r} - \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{6}.$$

D'autre part, si, usant d'un procédé bien des fois employé, on assujettit une courbe du système adjoint à contenir $\pi_r - \delta(rC)$ points d'une courbe rC, elle se décomposera en cette courbe et en une courbe du système canonique, si ce système existe, ce que nous supposons. On aura donc, $N_{n-4} = p_g - 1$ étant la dimension du système canonique,

$$N_{n-4+r} - \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{6} = N_{n-4} + \pi_r - \delta(rC).$$

Changeant r en $r+1$ et retranchant, on a

$$N_{n-4+r+1} - N_{n-4+r} = \pi_{r+1} - \pi_r + \delta(rC) - \delta[(r+1)C] + \frac{r(r-3)}{2} + 1$$

et, en tenant compte de la relation

$$\pi_{r+1} = \pi_r + \pi + rn - 1,$$

on obtient finalement l'égalité

$$N_{n-4+r+1} - N_{n-4+r} = \pi + rn + \delta(rC) - \delta[(r+1)C] + \frac{r(r-3)}{2}.$$

Or, nous avons déjà obtenu une expression de cette différence au Chap. IV, n° **23**, à propos de l'évaluation de la dimension du système des surfaces adjointes. En désignant par ω_{n-4+r} le défaut du système des adjointes planes d'ordre $n-4+r$ déterminé sur un plan arbitraire par les surfaces adjointes d'ordre $n-4+r$, nous avons trouvé la relation

$$N_{n-4+r+1} - N_{n-4+r} = \pi + rn - \frac{r(r-3)}{2} - \omega_{n-4+r+1}.$$

En égalant cette expression à la précédente, on a finalement la relation

$$\text{(A)} \qquad \delta[(r+1)C] - \delta(rC) = \omega_{n-4+r+1}.$$

La conclusion est alors immédiate. Nous savons en effet que pour une valeur suffisamment grande de r, le défaut ω s'annule; donc pour une valeur suffisamment grande de r, on aura l'égalité

$$\delta[(r+1)C] - \delta(rC) = 0.$$

16. Ainsi, lorsque r augmente, le défaut $\delta(rC)$ relatif au système $|rC|$ ne diminue jamais et atteint un maximum pour une certaine valeur de r, à partir de laquelle il reste constant. Supposons que le système $|C|$ soit le système des sections planes de la surface f considérée. Quel que soit le système linéaire de courbes $|C_1|$ que l'on envisage sur la surface, on peut toujours choisir l'entier r suffisamment grand pour que le système $|C_1|$ soit contenu partiellement dans le système $|rC|$ et, par suite, tel que l'on ait

$$\delta|C_1| \leqq \delta(rC).$$

Mais $\delta(rC)$ garde une valeur maximum constante à partir d'une valeur de r suffisamment élevée; donc :



Quel que soit le système $|C_1|$ irréductible envisagé sur une surface f, le défaut de la série découpée sur la courbe générale de ce système par son système adjoint a une valeur maximum indépendante du système considéré.

De plus, *cette valeur maximum est un invariant,* car il est bien évident, par la manière même dont nous l'avons définie, qu'elle ne peut pas changer quand on passe d'une surface à une autre par une transformation birationnelle.

17. *De l'invariance du maximum du défaut* $\delta(C)$ *résulte l'invariance du genre numérique* p_n *de la surface.* Reportons-nous au Chap. IV, n° **24** : nous avons trouvé pour le genre géométrique d'une surface d'ordre m, une expression de la forme

$$p_g = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} - k(m-4) + k'' + \sum_{h=m-3}^{h=l-1} \omega_h$$

et, par définition, le genre numérique p_n est déterminé par l'égalité

$$p_g - p_n = \sum_{h=m-3}^{h=l-1} \omega_h,$$

l étant la valeur de h à partir de laquelle les ω s'annulent.

Pour montrer l'invariance de p_n, l'invariance de p_g étant établie, il suffit de prouver l'invariance de la somme

$$\sum_{h=m-3}^{h=l-1} \omega_h$$

des défauts des systèmes de courbes découpées sur un plan arbitraire par les surfaces adjointes à f d'ordre supérieur ou égal à $m-3$. On y arrive de suite en partant de la relation (A) du n° **15**,

$$\delta[(r+1)]C - \delta(rC) = \omega_{n-4+r+1}$$

et faisant varier r depuis la valeur zéro jusqu'à celle qui correspond à $\omega_h = 0$. On trouve en ajoutant les relations ainsi obtenues

$$\sum_{h=m-3}^{h=l-1} \omega_h = \delta(rC),$$

$\delta(rC)$ étant la valeur maximum considérée qui est invariante. *La somme des défauts ω est donc un invariant et il en est de même de p_n : c'est ce que nous voulions établir.*

IV. — Généralités sur les courbes sous-adjointes.

18. Nous avons défini, dans les pages qui précèdent, le système adjoint à un système linéaire après avoir défini d'abord les surfaces adjointes et, en particulier, les surfaces canoniques. Puis, supposant l'existence d'un système canonique sur la surface, et nous appuyant sur la propriété d'invariance de ce système qui résultait pour nous de considérations de nature transcendante, nous avons démontré le théorème fondamental de M. Enriques d'où nous avons déduit l'invariance du défaut $\delta(C)$ et, par suite, l'invariance du genre numérique p_n.

Lorsque le genre géométrique est nul, si l'on veut suivre la même méthode, on peut bien encore, en se servant de la surface-image f' de f, dont le système des sections planes correspond au système donné $|C|$, définir les courbes adjointes au moyen des surfaces adjointes d'ordre $n-3$ à f'. Mais, revenant ensuite à la surface f, il est difficile de définir, sur cette surface même, les opérations qui permettent de construire les courbes adjointes et d'en déduire ensuite, comme nous l'avons fait, le théorème fondamental de M. Enriques.

Pour éviter cette difficulté, et aussi dans le but d'établir l'invariance du système canonique qu'il n'admet pas comme démontrée, M. Enriques a suivi une voie tout à fait différente de celle que nous avons adoptée, dans la section précédente, pour définir les courbes adjointes. Cette méthode, purement géométrique et algébrique, qui est applicable dans tous les cas (que le genre géométrique soit ou ne soit pas nul), est basée sur l'étude préliminaire des courbes sous-adjointes. Des propriétés fondamentales de ces courbes on conclut d'abord à la définition des courbes adjointes et, contrairement à la voie que nous avons suivie, on définit ensuite les surfaces adjointes et les surfaces canoniques.

Nous allons exposer les principaux points de cette méthode, en ayant en vue surtout le cas où la surface a un genre géométrique nul. Nous montrerons ensuite que, quel que soit le procédé em-

ployé, algébrique ou transcendant, on arrive à un même système canonique et *nous aurons établi ainsi un lien entre ces deux manières différentes d'aborder l'étude des surfaces algébriques*.

19. Une première remarque, dans cet ordre d'idées, est relative aux surfaces sous-adjointes. Nous avons vu (Chap. IV, n^os **13** et **14**) que les deux définitions, algébrique et transcendante, que l'on peut donner de ces surfaces étaient les mêmes, en ce sens qu'une surface φ qui est telle que sa section plane par un plan arbitraire est l'adjointe de la section plane correspondante de la surface donnée f est telle aussi que l'intégrale double

$$\int\int \frac{\varphi(x, y, z)}{f'_y(x, y, z)} dx\, dz$$

reste finie à distance finie, sauf en un nombre limité de points, et réciproquement.

Abordons maintenant l'étude des propriétés des courbes sous-adjointes.

20. Soit toujours, sur la surface $f(x, y, z) = 0$ d'ordre m, un système linéaire irréductible $|C|$ de genre π et de degré n. Nous avons défini au commencement de ce Chapitre ce que l'on doit entendre par *courbes sous-adjointes d'ordre* $n - 3 + r$ au système $|C|$. Ce sont des courbes qui jouissent de la propriété de couper une courbe générale C en un groupe de points appartenant à une série $g_{2\pi-2+rn}$. Nous les désignerons par la notation S_r, et par S celles qui sont d'ordre $n - 3$.

Nous bornant d'abord au *cas où le système* $|C|$ *est celui des sections planes de la surface* f, nous avons vu que le système des surfaces sous-adjointes d'ordre $m - 3 + r$ découpait sur cette surface un système $|S_r|$ de courbes sous-adjointes, de même ordre, au système $|C|$ des sections planes. Cela résulte de leur définition même. Nous allons montrer que réciproquement *toute courbe qui jouit de la propriété de couper un plan arbitraire suivant un groupe de la série* $g_{2\pi-2+rm}$ *appartient à une surface sous-adjointe d'ordre* $m - 3 + r$, *sauf le cas où la surface f donnée serait réglée ou serait une surface de Steiner*.

21. Supposons d'abord $r < 3$. Par une droite arbitraire a qui coupe la surface en m points en dehors de la courbe envisagée S_r, faisons passer un plan α : il coupera la surface suivant une courbe plane C, et les points d'intersection de C et de S_r, qui sont ceux de S_r et de α, appartiennent à une série $g_{2\pi-2+mr}$. Ces points, dans le cas considéré $r < 3$, *déterminent* donc, dans le plan α, une courbe adjointe C_{m-3+r} d'ordre $m-3+r$ à C. Lorsque le plan α tourne autour de a, cette courbe engendre une surface sous-adjointe à f, qui pourra contenir ρ fois la droite a, et dont l'ordre sera $m-3+r+\rho$. Il nous suffit de prouver que ρ est nécessairement *nul*.

En effet, dans le cas contraire, l'intersection de la surface sous-adjointe que nous venons de construire avec la surface f, se composerait, en dehors de S_r et des courbes multiples, d'une ou de plusieurs courbes passant par les points d'intersection de f et de a, qui, par hypothèse, n'appartiennent pas à S_r. Or, ces courbes ne peuvent être que planes et appartenir à des plans passant par a, sinon un plan quelconque passant par cette droite couperait la courbe S_r en un point de plus. Ces courbes planes sont, en outre, d'un ordre inférieur à m, puisque l'intersection de la surface sous-adjointe par un plan α se compose de la droite a comptée ρ fois et d'une courbe dont l'ordre est égal à $m-3+r < m$. Il existerait donc, quelle que soit la droite a, des plans passant par cette droite et coupant la surface f suivant une courbe réductible, propriété qui n'appartient, d'après ce que nous avons dit (p. 63), qu'aux surfaces réglées et aux surfaces de Steiner du quatrième ordre. Sauf ces cas, on a donc bien $\rho = 0$ et le théorème est démontré.

22. Supposons maintenant $r \geqq 3$. On fixera sur la droite a, $r-2$ points arbitraires $B_1, B_2, \ldots, B_{r-2}$ en dehors de f, et par $r-3$ de ces points, soit $B_2, \ldots, B_{r-2}$, on fera passer $r-3$ plans arbitraires $\beta_2, \ldots, \beta_{r-2}$ ne contenant pas a. Les courbes adjointes à la section plane de C de f par un plan α passant par a, et qui contiennent les points de rencontre de S_r et de α, forment alors un système linéaire de dimension $\frac{(r-1)(r-2)}{2}$. On fixera l'une de ces courbes en l'assujetissant à passer par les points B, à avoir au point B_2 deux points confondus avec le plan β_2, etc., et au

point B_{r-2}, $r-2$ points confondus avec le plan β_{r-2}. Cette courbe ne peut d'ailleurs se décomposer en la courbe C et en une courbe d'ordre $r-3$, car il n'existe pas de courbe d'ordre $r-3$ passant par les points B et ayant en ces points avec les plans β le contact spécifié. Donc la courbe adjointe que nous venons de définir, quand le plan α tournera autour de a, sera une surface sous-adjointe d'ordre au moins égal à $m-3+r$, et l'on démontrera, comme précédemment, que cet ordre est précisément égal à $m-3+r$, sauf dans les cas exceptionnels que nous avons spécifiés. Le théorème est encore démontré.

23. En nous reportant à un théorème démontré au Chap. IV, n° **15**, il résulte encore de la démonstration précédente, qu'*une courbe qui coupe tous les plans d'un faisceau suivant un groupe de la série $g_{2\pi-2+rm}$ jouit de cette propriété pour un plan arbitraire* et est, par suite, une *courbe sous-adjointe d'ordre* $m-3+r$ au système des sections planes de la surface f.

En résumé, *toutes les courbes sous-adjointes* S_r *d'ordre* $m-3+r$ *au système des sections planes* $|C|$ *de la surface* f *forment un système linéaire défini par le système de toutes les surfaces sous-adjointes de même dimension* $m-3+r$. Ce système est donc un système complet $|S_r|$.

24. Considérons maintenant, sur la surface f, un système linéaire arbitraire $|C|$, complet, irréductible, simple, de genre π supérieur à zéro, de degré n, et tel, en outre, qu'il n'existe pas, sur la surface, de faisceaux de courbes ayant, avec ce système, un seul point variable d'intersection. Soit

$$\alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_s L_s = 0 \tag{1}$$

le système de surfaces qui détermine $|C|$: on peut toujours faire en sorte que les surfaces L soient des surfaces arbitraires du système. Envisageons le système à trois dimensions

$$\alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 = 0 \tag{2}$$

et effectuons la transformation habituelle

$$x' = \frac{L_1}{L_0}, \qquad y' = \frac{L_2}{L_0}, \qquad z' = \frac{L_3}{L_0}.$$

qui transforme la surface f en la surface f' d'ordre n dont le système complet contenant les sections planes correspond au système $|C|$. Le genre du système transformé sera d'ailleurs égal à π, et, d'après les hypothèses faites, la surface f' ne sera pas réglée.

A une sous-adjointe d'ordre $n-3+r$ au système $|C|$ sur f correspondra sur f' une sous-adjointe de même ordre au système des sections planes de f', et réciproquement. Donc le système complet $|S'_r|$ de *toutes* les sous-adjointes d'ordre $n-3+r$ au système $|C'|$ des sections planes de f' a pour correspondant sur f un système complet $|S_r|$ qui contient *toutes* les courbes S_r sous-adjointes d'ordre $n-3+r$ au système $|C|$.

L'indétermination, qui semble exister dans cette définition, par suite du choix particulier des surfaces L qui ont servi à effectuer la transformation, disparaît d'ailleurs d'elle-même, si l'on tient compte de la remarque faite au n° 23, à savoir qu'une courbe qui coupe tous les plans d'un faisceau suivant un groupe de la série $g_{2\pi-2+rn}$ jouit de cette propriété pour un plan arbitraire. Si donc, dans la transformation précédente, on modifie seulement les surfaces L_2 et L_3, le système $|S'_r|$ ne changera pas, et comme d'ailleurs on peut toujours passer d'une surface transformée à une autre par une série de surfaces ayant deux à deux un faisceau commun, on en conclut bien que *l'ensemble de toutes les sous-adjointes d'ordre $n-3+r$ au système $|C|$ sur f forme un système complet $|S_r|$ qui est complètement déterminé* par le système de *toutes* les surfaces sous-adjointes d'ordre $n-3+r$ relatives à une surface d'ordre n image de la surface donnée, que l'on obtient au moyen de quatre surfaces arbitraires linéairement indépendantes du système des surfaces qui détermine le système donné $|C|$.

25. Si l'on impose aux surfaces sous-adjointes des conditions supplémentaires, si par exemple on considère, au lieu des surfaces sous-adjointes, les surfaces adjointes, il est évident que l'on obtiendra d'autres *systèmes complets,* d'après la définition même de ces systèmes, qui seront composés uniquement de sous-adjointes.

Il résulte du théorème précédent que *ces systèmes seront compris partiellement* dans le système complet défini au numéro pré-

cédent, qui est formé de toutes les sous-adjointes et que nous appellerons le *système total complet des sous-adjointes d'ordre* $n - 3 + r$.

De là résulte encore, et ceci est important, que le système résiduel d'un *système partiel* de sous-adjointes par rapport au *système total* ne pourra se composer que de courbes n'ayant avec le système donné $|C|$ aucune intersection variable, ou bien que le *système partiel* aura quelques points-bases non bases pour le *système total*. D'autre part, des courbes n'ayant avec le système $|C|$ aucune intersection variable ne peuvent être que des *courbes fixes fondamentales* par rapport à ce système. Donc *le système résiduel d'un système partiel de sous-adjointes par rapport au système total de ces sous-adjointes ne peut se composer que d'un ensemble de courbes fondamentales et de points fixes*.

Nous nous bornerons, dans ce qui va suivre, aux *sous-adjointes d'ordre* $n - 3$, que nous désignerons par S sans indice.

26. Voyons maintenant quelles relations existent entre les systèmes sous-adjoints de deux systèmes dont l'un est le résiduel d'une courbe ou d'un troisième système par rapport à l'autre.

Soit $|C_1|$ le système résiduel d'une courbe C_2 par rapport à un système $|C|$

$$|C_1| = |C| - C_2.$$

Si le système $|S|$ *des sous-adjointes à* $|C|$ *contient la courbe* C_2, *le système résiduel* $|S| - C_2$ *constitue un système de sous-adjointes à* $|C|$, qui pourra être partiel ou total, c'est-à-dire que les courbes de ce système découperont sur une courbe C_1 arbitrairement choisie un groupe de la série $g_{2\pi_1-2}$, π_1 étant le genre de $|C_1|$.

Pour démontrer ce résultat, remarquons que parmi les surfaces-images f' de f dont le système des sections planes correspond au système $|C|$, nous pouvons en choisir une telle que l'une de ses sections planes se décompose en deux courbes C'_1 et C'_2 correspondant à la courbe C_1 arbitrairement choisie et à la courbe C_2. Or les points multiples d'une courbe plane C' transformée d'une courbe C appartiennent aux lignes multiples de la surface f'. Il en est de

même pour la courbe $C'_1 + C'_2$, mais elle aura, en outre, i points doubles correspondant aux i points d'intersection variables d'une C_1 et d'une C_2. Le système $|S|$ des sous-adjointes à $|C|$ est, par définition, déterminé sur f' par l'ensemble des surfaces sous-adjointes Φ' d'ordre $n-3$. Soient n_1 et n_2 les ordres respectifs de C'_1 et de C'_2 sur f', en sorte que l'on a $n = n_1 + n_2$. Celles des surfaces Φ' qui passent par C'_2, ce qui est possible par hypothèse, détermineront sur f' le système $|S| - C'_2$. Or, chacune de ces surfaces découpe sur le plan de $C'_1 + C'_2$, en dehors de C'_2, une courbe d'ordre $n - 3 - n_2 = n_1 - 3$, qui est évidemment adjointe à C'_1 et coupe, par conséquent, C'_1 en $2\pi_1 - 2$ points en dehors des i points d'intersection de C'_1 et de C'_2. Or, ces points sont ceux où la courbe d'intersection $S - C'_2$ de la surface Φ' envisagée et de f' coupe la courbe C'_1; donc cette courbe $S - C'_2$ (et, par suite, sur la surface f, la courbe $S - C_2$) est une sous-adjointe à C_1, ce qu'il fallait démontrer.

27. Envisageons encore le cas où un système $|C_1|$ se déduit d'un système $|C|$ par l'adjonction de nouveaux points-bases. Il nous suffira de supposer que l'on adjoint au système $|C|$ un seul point-base O d'ordre λ, en sorte que le système $|C_1|$ est défini par

$$|C_1| = |C - O^\lambda|.$$

Dans cette hypothèse, *les sous-adjointes à* $|C|$ *qui ont le point* O *comme point-base d'ordre* $\lambda - 1$, si cette opération est possible, *sont des sous-adjointes à* $|C_1|$.

La démonstration est immédiate. Les sous-adjointes S, sur f, coupent toutes les courbes C, et, par conséquent, la courbe C_1, qui est une courbe totale de $|C|$, en un même nombre de points. Donc les sous-adjointes S qui ont le point O comme point multiple d'ordre $\lambda - 1$ couperont C_1, en dehors de ce point multiple et d'une partie commune à toutes les courbes C, en

$$2\pi - 2 - \lambda(\lambda - 1)$$

points. Or, si π_1 désigne le genre de C_1, on a

$$\pi_1 = \pi - \frac{\lambda(\lambda - 1)}{2},$$

d'où

$$2\pi - 2 - \lambda(\lambda - 1) = 2\pi_1 - 2,$$

et, par suite, les courbes du système $|S - O^{\lambda-1}|$ sont bien des sous-adjointes à $|C_1|$.

28. Si le système $|C_1|$ se déduit du système $|C|$, en imposant au point-base O de $|C|$, supposé de multiplicité λ, une multiplicité supérieure $\lambda + \rho$, on verrait, par un raisonnement analogue au précédent, que les courbes du système $|S - O^\rho|$ sont sous-adjointes à $|C_1|$.

29. En résumé, soit un système $|C_1|$ que l'on déduit d'un système $|C|$, en retranchant de ce système un système $|C_2|$ et imposant au système résiduel des nouveaux points-bases O d'ordre λ non bases pour $|C|$, en sorte que l'on peut écrire symboliquement

$$|C_1| = |C - C_2 - \Sigma O^\lambda|:$$

si $|S|$ désigne le système total des sous-adjointes à $|C|$, ou un système partiel, les courbes du système

$$|S - C_2 - \Sigma O^{\lambda-1}|,$$

si l'opération ainsi définie est possible, forment un système complet de sous-adjointes à $|C_1|$, qui peut être total ou partiel. S'il est partiel, le système total $|S_1|$ sera la somme de ce système partiel et d'un groupe θ_1 de courbes fondamentales pour C_1 et parmi lesquelles nous supposerons compris les points-bases appartenant au système partiel et pas au système total. Nous écrirons donc

$$|S_1| = |S - C_2 - \Sigma O^{\lambda-1} + \theta_1|.$$

30. Les remarques précédentes se rapportent à la soustraction d'une courbe du système sous-adjoint. Envisageons maintenant l'opération de l'addition.

Soit $|C| = |C_1 + C_2|$ le système complet, somme des deux systèmes irréductibles $|C_1|$ et $|C_2|$. Nous savons que chacun de ces systèmes peut être considéré comme le résiduel de l'autre par rapport à $|C|$ (Chap. V, nº 21). On peut, en particulier, considérer le système $|C_1|$ comme le résiduel de $|C|$ par rapport à une

courbe C_2,

$$|C_1| = |C| - C_2.$$

Soient $|S_1|$ le système total des sous-adjointes à $|C_1|$, et $|S|$ celui des sous-adjointes à $|C|$, θ_1 un groupe de courbes fondamentales pour $|C_1|$, on a, en vertu des remarques précédentes (n° 29),

$$|S_1| = |S - C_2 + \theta_1|,$$

puisque le système $|C_1|$ n'a pas de points-bases qui n'appartiennent pas à $|C|$. Ainsi le système $|S_1|$ est le résiduel du système $|S + \theta_1|$ par rapport à $|C_2|$.

Supposons, en outre, et cela suffit pour le résultat que nous voulons mettre en évidence, que le système $|C_2|$ n'ait pas de points-bases : alors le système $|S + \theta_1|$ sera la somme des deux systèmes $|S_1|$ et $|C_2|$ (Chap. V, n° 25),

$$|S_1 + C_2| = |S + \theta_1|,$$

d'où l'on conclut que si les courbes θ_1 fondamentales pour $|C_1|$ ne sont pas fondamentales pour $|C|$, une courbe $S + \theta_1$ coupera une courbe C en plus de $2\pi - 2$ points, donc que le système $|S_1 + C_2|$ ne sera pas formé de sous-adjointes à $|C|$. Ainsi, *tandis que le système* $|S - C_2|$ *résiduel du système des sous-adjointes* $|S|$ *de* $|C|$ *par rapport à* $|C_2|$ *forme un système de sous-adjointes à* $|C_1|$, *réciproquement le système* $|S_1 + C_2|$ *somme du système des sous-adjointes à* $|C_1|$ *et du système* $|C_2|$ *ne forme pas, en général, un système de sous-adjointes à* $|C|$. Cette remarque est capitale pour ce qui va suivre.

V. — Des courbes adjointes à un point de vue purement géométrique.

31. Nous sommes en mesure maintenant de donner la définition du système adjoint à un système donné, telle que l'a formulée M. Enriques [1], *sans supposer faite préalablement l'étude du système canonique*.

---

(1) FREDERIGO ENRIQUES, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (n° 25) [*Memorie della Società italiana delle Scienze* (detta dei XL), série IV, t. X.

G. CASTELNUOVO et F. ENRIQUES, *Sur quelques résultats récents dans la théorie des surfaces algébriques* (*Mathem. Annalen*, t. XLVIII).



En outre des propriétés du système sous-adjoint que nous venons d'établir, il faut admettre, comme point de départ de ces recherches, la possibilité de transformer une surface quelconque en une autre sans singularités dans l'hyperespace, c'est-à-dire en une autre n'ayant que des singularités ordinaires, courbe double et points triples, dans l'espace à *trois* dimensions. En nous reportant à ce que nous avons dit précédemment sur ce sujet, nous admettons donc la possibilité de définir, sur toute surface, *un système pur non singulier,* c'est-à-dire simple, irréductible, sans points-bases ni courbes fondamentales et qui permet d'effectuer la transformation précédente. Il existe une infinité de ces systèmes; nous les désignerons par la notation $|M|$.

32. Cela posé, le *système adjoint* $|M_a|$ à un système $|M|$ pur, non singulier, est, *par définition,* le système total des sous-adjointes à ce système, et les surfaces sous-adjointes qui le déterminent sur la surface transformée (qui n'a que des singularités ordinaires) sont considérées comme des *surfaces adjointes.*

Cette définition des *surfaces adjointes* concorde bien, dans ce cas particulier, avec celle que nous avons donnée antérieurement (Chap. IV, n° 20).

Appliquons à ces courbes adjointes $|M_a|$ les remarques faites dans la section précédente.

Soient $|M_1|$ et $|M_2|$ deux systèmes purs non singuliers; leur somme

$$|M| = |M_1 + M_2|$$

sera aussi un système pur non singulier. On aura donc, d'après ce que nous avons dit (n° 30), entre les systèmes adjoints, qui se confondent avec les systèmes sous-adjoints, non seulement la relation

$$|M_{1a}| = |M_a - M_2|,$$

mais aussi la relation réciproque

$$|M_a| = |M_{1a} + M_2| = |M_1 + M_{2a}|,$$

puisque ces systèmes n'ont pas de courbes fondamentales.

Nous avons supposé que le système $|M_a|$ n'a pas de points-bases. C'est ce qui a lieu le plus souvent, puisque le système-

somme d'un système de sous-adjointes et de ses points-bases forme évidemment un système de sous-adjointes, et que nous avons supposé que le système $|M_a|$ était le système total des sous-adjointes. Mais, en restant dans la plus grande généralité, il se pourrait que cette opération de l'addition ne fût pas possible, et que le système $|M_a|$ eût nécessairement des points-bases. Nous devons donc supposer que les égalités symboliques précédentes sont écrites à des points-bases près.

33. Considérons maintenant un système irréductible arbitraire $|C|$. On peut toujours supposer que ce système est obtenu au moyen d'un système pur non singulier $|M_1|$ en retranchant de ce système un système irréductible $|C'_1|$, et imposant au système résiduel les points-bases O de $|C|$ avec leur degré de multiplicité λ, en sorte que l'on peut écrire symboliquement les deux égalités

$$|C| = |M_1 - C'_1 - \Sigma O^\lambda|$$

et

$$|M_1| = |C + C'_1 + \Sigma O^\lambda|.$$

Or, nous avons vu (nº 29) que le système défini par

$$|M_{1a} - C'_1 - \Sigma O^{\lambda-1}|$$

est un système complet partiel de sous-adjointes à $|C|$, mais qu'il n'est pas, en général, le système total si le système $|C|$ a des courbes fondamentales.

On donne le nom de système adjoint à $|C|$ *à ce système partiel.* Il est donc défini symboliquement par

$$|C_{1a}| = |M_{1a} - C'_1 - \Sigma O^{\lambda-1}|.$$

Pour que le système adjoint à $|C|$ existe, il faut donc, d'après cette définition, que le système $|M_{1a}|$ contienne partiellement $|C'_1|$.

Il faut, en outre, pour que cette définition ait un sens précis, montrer qu'elle est indépendante du système particulier $|M_1|$ pris comme point de départ. Soit donc $|M_2|$ un second système pur non singulier, tel que l'on ait

$$|M_2| = |C + C'_2 + \Sigma O^{\lambda-1}|.$$

Formons le système-somme

$$|M| = |M_1 + M_2|.$$

On a

$$|M_a| = |M_{1a} + M_2| = |M_1 + M_{2a}|$$

et, par suite,

$$|M_{1a} + C + C'_2 + \Sigma O^\lambda| = |M_{2a} + C + C'_1 + \Sigma O^\lambda|.$$

Mais, par hypothèse, le système $|M_{1a}|$ contient partiellement $|C'_1|$: on peut donc, de cette relation, conclure (Chap. V, n° 26)

$$|M_{1a} - C'_1| = |M_{2a} - C'_2|$$

et

$$|M_{1a} - C'_1 - \Sigma O^{\lambda-1}| = |M_{2a} - C'_2 - \Sigma O^{\lambda-1}|.$$

Par là se trouve bien justifiée la définition du système adjoint $|C_a|$ à un système $|C|$ irréductible quelconque.

34. Nous arrivons maintenant au théorème fondamental de M. Enriques que nous avons déjà énoncé (n° 9) :

Soient $|C_1|$ *et* $|C_2|$ *deux systèmes linéaires de courbes sur une surface, le système* $|C_{1a}|$ *adjoint au premier, additionné au second, donne un système* $|C_{1a} + C_2|$ *qui est contenu dans le système* $|C_a|$ *adjoint à* $|C| = |C_1 + C_2|$ *et qui en diffère seulement en ce que tout point-base d'ordre* λ_2 *pour* $|C_2|$ *et non base pour* $|C_1|$ *est d'ordre* λ_2 *pour* $|C_{1a} + C_2|$ *et d'ordre* $\lambda_2 - 1$ *pour* $|C_a|$.

Ce théorème est une conclusion immédiate des définitions précédentes. Il suffit d'effectuer les opérations de l'adjonction sur les systèmes définis par les égalités symboliques

$$|M_1| = |C_1 + C'_1 + \Sigma O_1^{\lambda_1}|,$$
$$|M_2| = |C_2 + C'_2 + \Sigma O_2^{\lambda_2}|,$$
$$|M| = |M_1 + M_2| = |C + C'_1 + C'_2 + \Sigma O_1^{\lambda_1} + \Sigma O_2^{\lambda_2}|.$$

On en conclut

$$|C_a| = |C_{1a} + C_2 + \Sigma O_2| = |C_{2a} + C_1 + \Sigma O_1|,$$

ce qui est l'expression du théorème énoncé.

35. De ce théorème on conclut, comme aux n°s 10 et 11, que si $|C_2|$ est le système résiduel d'un système $|C|$ par rapport à un

système $|C_1|$ qui y est contenu partiellement, en sorte que l'on a

$$|C| = |C_1 + C_2 + \Sigma A^{\mu}|,$$

le système adjoint $|C_a|$ de $|C|$ se déduit du système $|C_{1a}|$ adjoint à $|C_1|$ par l'opération

$$|C_a| = |C_{1a} + C_2 + \Sigma A^{\mu-1} + \Sigma B|,$$

A désignant les points-bases de $|C_1|$ non bases pour $|C|$, et B les points-bases de $|C|$ non bases pour $|C_1|$ et, par conséquent, bases pour $|C_2|$.

36. Remarquons encore que, des développements précédents, il résulte que dès que l'on connaît le système adjoint à un système donné, on peut, par de simples opérations d'addition et de soustraction effectuées sur la surface, en déduire le système adjoint à un système arbitrairement donné.

37. Au point où nous en sommes, il ne sera pas inutile de mettre de nouveau en évidence les différences qui existent entre les deux méthodes qui nous ont servi à définir le système adjoint.

Dans la première, nous plaçant au point de vue transcendant, nous avons commencé par définir les surfaces canoniques et les surfaces adjointes. Puis, *supposant qu'il existe un système canonique*, c'est-à-dire que $p_g > 0$, et partant de la propriété d'invariance de ce système, déduite de l'étude des intégrales doubles de première espèce, nous avons défini alors le système adjoint; nous nous sommes placés dans cette première méthode à un tout autre point de vue que M. Enriques.

Dans la seconde méthode, au contraire, laissant absolument de côté le point de vue transcendant, et n'employant que des opérations purement algébriques et géométriques, nous avons d'abord, avec M. Enriques, étudié les propriétés des systèmes sous-adjoints et nous en avons conclu une définition des systèmes adjoints, *sans faire jusqu'à présent aucune hypothèse sur l'existence ou la non-existence du système canonique* qui n'est pas encore défini, et nous sommes ainsi arrivés au théorème fondamental.

Avant d'aborder la question du genre numérique des surfaces de genre géométrique nul, il y a évidemment lieu de voir com-



ment, ayant défini le système adjoint par ce dernier procédé, on arrive ensuite à la notion du système canonique et si ce système est le même que celui auquel nous avons donné ce nom en nous appuyant sur des considérations de nature transcendante. En d'autres termes, il s'agit de voir si les deux définitions du genre géométrique auxquelles on arrive par des procédés différents sont bien les mêmes.

Puis il nous restera encore à définir les surfaces adjointes.

38. La définition du *système canonique,* au point de vue algébrique, est une conséquence du théorème fondamental. De l'égalité

$$|C_{1a}+C_2+\Sigma O_2|=|C_{2a}+C_1+\Sigma O_1|,$$

on déduit en effet que *si le système* $|C_{1a}|$ *adjoint à* $|C_1|$ *contient ce système,* on pourra écrire

$$|C_{1a}-C_1-\Sigma O_1|=|C_{2a}-C_2-\Sigma O_2|,$$

d'où la conclusion suivante, qui est la réciproque d'une proposition énoncée (n° 8) :

Si, sur une surface, un système irréductible est contenu dans son système adjoint, tout autre système irréductible est aussi contenu dans son adjoint. Chaque système sur la surface a donc, par rapport à son adjoint, un système résiduel qui, à des points-bases près, est indépendant du système choisi pour le construire.

Ce système résiduel est, par définition, le *système canonique* de la surface, et sa dimension augmentée d'une unité est le *genre géométrique* de la surface.

On a donc, pour définir ce système, $|C|$ étant un système arbitraire et O ses points-bases, l'égalité

$$|K|=|C_a-C-\Sigma O|.$$

Considérons, en particulier, un système pur non singulier $|M|$ qui permet d'effectuer la transformation de la surface en une surface n'ayant que des singularités ordinaires; le système canonique $|K|$ est aussi le résiduel du système $|M|$ par rapport à son

adjoint $|M_a|$

$$|K| = |M_a - M|.$$

Or, par définition (n° 32), le système adjoint à un système pur non singulier est le système total de ses sous-adjointes. Soit n le degré du système $|M|$, qui est l'ordre de la surface transformée f'. Sur la surface f', le système adjoint $|M_a|$ est défini par le système des surfaces sous-adjointes d'ordre $n-3$, et par conséquent le système $|K|$ est défini par le système des surfaces sous-adjointes d'ordre $n-4$.

D'autre part, d'après ce que nous avons dit (Chap. IV, n° 20 et n° 19 de ce Chap.), ces surfaces sous-adjointes, puisque la surface f' n'a que des singularités ordinaires, ne sont autres que les surfaces adjointes du même ordre définies par voie transcendante. De là on conclut, sans qu'il soit besoin d'insister, que le système canonique $|K|$ défini par voie transcendante est bien le même que le système canonique défini par voie algébrique, que les dimensions de ces deux systèmes sont aussi les mêmes, et cette seconde méthode établit comme la première l'invariance du genre géométrique p_g.

39. Au point de vue algébrique et géométrique où nous nous sommes placés dans cette section, il nous reste encore à définir les *surfaces adjointes à une surface ayant des singularités quelconques*. Lorsque la surface n'a que des *singularités ordinaires* les surfaces adjointes sont par définition les surfaces sous-adjointes.

Soit $|C|$ le système des sections planes d'une surface f d'ordre m et $|C_a|$ son système adjoint. Ce système est découpé sur f par un système particulier de surfaces sous-adjointes d'ordre $m-3$, auxquelles on donne le nom de *surfaces adjointes* d'ordre $m-3$ à f. Elles diffèrent des sous-adjointes par leur comportement aux points multiples isolés de f.

De cette définition on conclut à celle des surfaces adjointes d'ordre $m-3+r\,(r \gtrless 0)$: ce sont les surfaces sous-adjointes de même ordre qui se comportent comme les surfaces adjointes d'ordre $m-3$ le long des lignes multiples et aux points multiples isolés de f. Elles jouissent de la propriété de découper sur f le système adjoint au système $|(r+1)C|$. En effet, on a, en vertu du théorème



fondamental,

$$|[(r+1)C]_a| = |C_a + rC|;$$

or, une courbe $C_a + rC$ étant déterminée par une surface adjointe d'ordre $m-3$ et par une surface arbitraire d'ordre r, le système tout entier sera évidemment défini par le système des surfaces adjointes d'ordre $m-3+r$. C'est le raisonnement que nous avons déjà fait (n° **14**).

Partant de cette définition des surfaces adjointes, M. Enriques montre que les surfaces adjointes d'ordre $m-4$ ne sont autre chose que les surfaces canoniques de Nœther, c'est-à-dire celles que nous avons définies tout d'abord. Les considérations qu'il emploie, dans lesquelles les courbes fondamentales jouent un rôle important, sont délicates; comme la question est pour nous évidente d'après notre première méthode, nous renvoyons pour ce point le lecteur aux mémoires originaux de l'auteur.

VI. — Du genre numérique des surfaces dont le genre géométrique est nul.

40. Revenons maintenant à la question qui nous intéresse, c'est-à-dire à la démonstration de l'invariance du genre numérique p_n, quand le genre géométrique est nul, $p_g = 0$. Il nous reste peu de chose à dire, du moment que la propriété du système adjoint est établie.

En désignant toujours par $\delta(C)$ le défaut de la série canonique déterminée par $|C_a|$ sur la courbe générale de $|C|$, de sorte que la dimension de cette série est

$$\pi - 1 - \delta(C),$$

on voit d'abord que, dans le cas où $p_g = 0$, ce nombre est aussi la dimension de $|C_a|$. En effet, la dimension de $|C_a|$ est, comme pour le cas de $p_g > 0$, celle du système des surfaces adjointes d'ordre $n-3$ à la surface f', image de f, dont le système des sections planes est l'image du système $|C|$. Mais, dans le cas actuel, il n'existe pas de surface adjointe d'ordre $n-3$ passant par $\pi - \delta(C)$ points pris arbitrairement sur une courbe plane C' image de C. Donc la dimension de ce système de surfaces, et par

suite la dimension de $|C_a|$, est bien égale à

$$\pi - 1 - \delta(C).$$

41. Quant au théorème établissant la relation

$$\delta(C) \geqq \delta(C_1),$$

du moment que le système $|C_1|$ est contenu partiellement dans $|C|$, il se démontre sans aucun changement.

Pour démontrer ensuite que *le défaut* $\delta(rC)$ *lorsque* r *augmente atteint un maximum,* il suffira de remarquer que, dans le cas où $p_g = 0$, il n'existe pas de courbe du système adjoint pouvant contenir $\pi_r - \delta(rC)$ points d'une courbe rC. La dimension du système $|(rC)_a|$ est donc égale à

$$\pi_r - \delta(rC) - 1,$$

et l'on en déduit l'égalité

$$N_{n-4+r} - \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{6} = \pi_r - 1 - \delta(rC),$$

puis, en passant par les mêmes intermédiaires, la relation

$$\text{(A)} \qquad \delta[(r+1)C] - \delta(rC) = \omega_{n-4+r+1}$$

et finalement

$$\delta(rC) = \sum \omega_{n-4+r} = -p_n,$$

où $\delta(rC)$ a sa valeur maxima invariante. Donc *le genre numérique* p_n *a bien une valeur invariante* dans le cas où $p_g = 0$.

Faisons encore une dernière remarque. Nous n'avons établi l'identité qui doit exister entre les surfaces adjointes définies, soit par le procédé transcendant, soit par le procédé algébrique, que dans le cas où la surface n'a que des singularités ordinaires. Mais peu importe, puisque la valeur maxima de $\delta(C)$ est un invariant, qui convient par conséquent à toutes les surfaces-images, et en particulier à la surface-image qui n'a que des singularités ordinaires. On trouvera donc toujours la même valeur pour p_n.

VII. — Du système bicanonique.

42. Une notion très intéressante, et sur laquelle M. Enriques est le premier à avoir appelé l'attention, est celle du *système bicanonique,* qui joue un rôle fondamental dans la théorie des surfaces rationnelles, et peut fournir, dans bien d'autres cas, de nouveaux caractères invariants de la surface, distincts des nombres p_g et p_n étudiés précédemment. Nous nous bornerons à donner la définition d'un pareil système et à mettre en évidence ses principales propriétés.

Soient $|C_1|$ et $|C_2|$ deux systèmes linéaires de courbes sur une surface, et reportons-nous au théorème fondamental de M. Enriques (n° 34) qui est exprimé par la relation symbolique

$$|C_{1a}+C_2+\Sigma O_2|=|C_{2a}+C_1+\Sigma O_1|$$

d'où l'on conclut

$$(1)\qquad |2C_{1a}+2C_2+2\Sigma O_2|=|2C_{2a}+2C_1+2\Sigma O_1|.$$

Si le système $|C_{1a}|$ adjoint à $|C_1|$ contient ce système, c'est-à-dire si la surface possède un système canonique ($p_g>0$), il résulte de la deuxième égalité que *le système*

$$(\text{A})\qquad |2C_{1a}-2C_1-2\Sigma O_1|=|2C_{2a}-2C_2-2\Sigma O_2|$$

est le double du système canonique; et il ne peut évidemment donner lieu à aucune considération nouvelle.

Mais supposons, au contraire, que la surface soit de genre $p_g=0$, c'est-à-dire que le système $|C_{1a}|$ ne contienne pas $|C_1|$, il pourra arriver cependant, comme nous le verrons tout à l'heure par des exemples, que le système $|2C_{1a}|$ contienne le système $|2C_1|$, et qu'on puisse, par conséquent, de l'égalité (1) conclure à l'égalité (A); d'où cet énoncé :

Si une surface algébrique, le double d'un système linéaire irréductible $|C|$, *est contenue dans le double de son système adjoint* $|C_a|$, *il en sera de même pour tout autre système linéaire sur la surface, et le système résiduel de* $|2C|$ *par rapport à* $|2C_a|$ *est, à des points bases près, le même quel que soit le système* $|C|$.

Le système

$$|2C_a - 2C - 2\Sigma O|$$

est donc un système parfaitement déterminé. C'est à ce système que M. Enriques a donné le nom de *système bicanonique*. Le nombre P des courbes bicanoniques linéairement indépendantes est évidemment un invariant et s'appelle le *bigenre* de la surface. On pose $P = 0$ si le système $|2C|$ n'est pas contenu dans $|2C_a|$, et $P = 1$, si le système résiduel $|2C_a - 2C|$ se compose d'une seule courbe ou si le système $2C_a$ coïncide avec le système $2C$.

43. Relativement à la série de groupes de points qu'une courbe bicanonique découpe sur la courbe générale d'un système irréductible, on a l'énoncé suivant :

Une courbe bicanonique arbitraire découpe sur la courbe générale d'un système irréductible $|C|$ un groupe de points qui, ajouté à deux groupes de la série caractéristique de $|C|$ et aux points-bases de $|C|$ comptés avec le double de leur degré de multiplicité, constituent un groupe de la série $g_{4\pi-4}$, π étant le genre d'une courbe C.

44. Proposons-nous maintenant de construire le système bicanonique sur une surface, s'il existe. Bornons-nous au cas d'une surface qui n'aurait que des singularités ordinaires, courbe double avec points triples, ou plus généralement une courbe multiple ordinaire d'ordre i, sans points isolés, en sorte que les systèmes des surfaces adjointes et sous-adjointes coïncident. Soit $|C|$ le système des sections planes d'une pareille surface. Cherchons quel est le système de surfaces adjointes qui déterminera le système bicanonique. Or, chaque courbe bicanonique coupe une courbe C en $4\pi - 4 - 2n$ points, comme il résulte de la remarque précédente (n° 43). Ce dernier nombre peut s'écrire sous la forme

$$4\pi - 4 - 2n = 2\pi - 2 + 2\pi - 2 - 2n = 2\pi - 2 + n(n-5) - i(i-1),$$

d'où l'on conclut que le système bicanonique est découpé par des surfaces adjointes d'ordre $n - 3 + n - 5 = 2n - 8$, mais non par le système total de ces surfaces. Il faut envisager seulement celles qui, le long de la ligne multiple d'ordre i, ont un comportement tel que les sections, par un plan général, de la surface



considérée et de l'une de ces surfaces adjointes aient, aux points de rencontre avec la ligne multiple, $i(i-1)$ points de rencontre condensés en plus des $i(i-1)$ points qui s'y trouvent déjà, en vertu de la définition des surfaces adjointes. C'est donc un total de $2i(i-1)$ points, qui se réduit, pour $i=2$, à 4. Donc, *dans le cas d'une surface n'ayant qu'une courbe double avec points triples, le système bicanonique est déterminé par celles des surfaces adjointes d'ordre* $2n-8$ *qui admettent la courbe double comme ligne double*. Le nombre de ces surfaces *biadjointes,* linéairement indépendantes et *ne contenant pas la surface* f, est égal au bigenre [1].

45. Donnons quelques exemples de surfaces ayant le genre géométrique nul et un bigenre $P>0$.

Considérons d'abord, avec M. Enriques, une surface du sixième ordre ayant pour lignes doubles les six arêtes d'un tétraèdre, et par suite les quatre sommets comme points triples. Une telle surface a une équation de la forme

$$f_2(x_2x_3x_4,\ x_1x_3x_4,\ x_1x_2x_4,\ x_1x_2x_3)+x_1x_2x_3x_4\varphi_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=0,$$

où f_2 et φ_2 sont des formes quadratiques : la première des produits $x_2x_3x_4$, ... la seconde des variables x_1, x_2, x_3, x_4, les faces du tétraèdre ayant pour équations $x_1=x_2=x_3=x_4=0$. Cette surface n'a pas de points multiples isolés, et sa section par un plan arbitraire, même passant par un des sommets, est une courbe de genre constant égal à 4. Les surfaces adjointes à une pareille surface doivent passer simplement par les six arêtes du tétraèdre. Il n'existe pas de surface adjointe du second degré, c'est-à-dire de surface canonique, donc $p_g=0$.

D'autre part, le nombre des conditions pour qu'une surface de degré n contienne les six arêtes du tétraèdre est égal à $6n-2$; le

(1) L'importance du bigenre P ressortira suffisamment d'un théorème extrêmement remarquable dû à M. Castelnuovo, que nous ne pouvons malheureusement qu'énoncer ici : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit unicursale est que l'on ait* $p_n=0$, $P=0$ (Castelnuovo, *Memoria premiata dalla Società Italiana delle Scienze,* 1896). Il est bien curieux que l'égalité à zéro de *deux* nombres invariants relatifs à la surface suffise pour qu'elle soit unicursale.

genre numérique de la surface est donc égal à

$$p_n = \frac{(6-1)(6-2)(6-3)}{6} - 6.2 + 2 = 0.$$

Il existe, au contraire, *une* surface adjointe d'ordre $2n - 8 = 4$ passant deux fois par chaque arête du tétraèdre, c'est le système des quatre faces de ce tétraèdre, donc

$$P = 1.$$

46. Voici un second exemple dû à M. Castelnuovo : une surface du septième ordre ayant une droite triple, une conique double ne coupant pas la droite, et trois tacnodes dont les plans tacnodaux passent par la droite, a les caractères $p_g = p_n = 0$, et $P = 2$. De plus les courbes bicanoniques variables sont des quartiques elliptiques sur des plans passant par la droite triple.

Voyons d'abord comment on peut construire une pareille surface. Sur une surface cubique générale $f_3 = 0$, fixons une droite r et une conique k n'ayant pas de points communs avec la droite. Par r, comme on le voit facilement, passent cinq plans qui sont tangents à f_3 en des points extérieurs à r. Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ trois de ces plans, A, B, C leurs points de contact, et $\delta = 0$ un plan arbitraire passant par r. La surface

$$f_3^2 \delta = 0$$

est bien une surface du septième ordre satisfaisant à l'énoncé.

Une deuxième s'obtient en considérant une surface du quatrième ordre $f_4 = 0$, passant doublement par la conique k, touchant les plans α, β, γ, en A, B, C, et à laquelle on adjoint les trois plans $\alpha\beta\gamma = 0$, soit

$$f_4 \alpha\beta\gamma = 0.$$

La surface générale du faisceau

$$F_7 = f_3^2 \delta + \lambda f_4 \alpha\beta\gamma = 0$$

est une surface indécomposable du septième ordre satisfaisant à l'énoncé.

Les surfaces adjointes à une pareille surface sont d'ordre 3, elles doivent passer simplement par la conique k, doublement par



la droite r; chacune de ces surfaces doit donc déjà se décomposer en le plan de la conique k et en deux plans passant par r. Mais la surface possédant trois tacnodes A, B, C, les surfaces adjointes doivent passer par ces points, c'est-à-dire que les deux plans passant par r devraient les contenir, ce qui n'a pas lieu généralement. Donc il n'existe pas de surface du troisième ordre adjointe à F_7, et l'on a par suite

$$p_g = 0.$$

Calculons p_n. Une surface du troisième degré dépend de vingt coefficients. Le nombre des conditions pour qu'une pareille surface ait comme courbe double une droite donnée est égal à 10, pour qu'elle passe par la conique k est égal à 7, et pour qu'elle passe par les points A, B, C égal à 3; soit 20 conditions simples, donc

$$p_n = 0.$$

Une surface biadjointe sera de l'ordre 6, devra passer deux fois par la conique k et par la droite r, de manière que le nombre des points de rencontre des sections planes correspondantes de cette surface et de la surface F_7, condensés au point de rencontre de la droite et du plan, soit de $2i(i-1) = 12\ (i = 3)$: ce qui exige que la surface biadjointe passe trois fois par la droite r et ait, en outre, en chaque point de cette droite, les mêmes trois plans tangents que la surface F_7. Elle doit, en outre, toucher les plans α, β, γ aux points A, B, C.

Ces conditions exigent que la surface biadjointe se décompose en le plan de k et en une surface du cinquième ordre φ_5 passant trois fois par r avec les mêmes plans tangents que F_7 en chaque point de cette droite, une fois par k, et tangente aux plans α, β, γ en A, B, C. Or un plan arbitraire passant par r touche F_7 en quatre points variables avec le plan puisque la surface F_7 n'a pas, comme on le voit facilement, de points quadruples sur r. Donc ce plan doit toucher aux mêmes quatre points la surface φ_5 qui passe trois fois par r. Cela exige que cette surface passe non seulement trois fois mais quatre fois par r, et par suite, en tenant compte des autres conditions, elle devra se décomposer en le plan de k et en quatre plans passant par r, à savoir les trois plans α, β, γ, et un quatrième plan variable qui détermine sur F_7 la partie va-

riable de la courbe bicanonique générale. On a donc bien

$$P = 2$$

et la courbe bicanonique est une quartique avec deux points doubles.

47. De la notion de système bicanonique on passe naturellement, ainsi que l'a montré M. Enriques, à la notion des *systèmes i fois canoniques,* et qui sont définis de la manière suivante : partant toujours de la relation fondamentale

$$|C_{1a} + C_2| = |C_{2a} + C_1|,$$

en supposant pour plus de simplicité que les systèmes $|C_1|$ et $|C_2|$ n'ont pas de points-bases, on tire

$$|iC_{1a} - iC_1| = |iC_{2a} - iC_2| = |K_i|,$$

si le système $|iC_{1a}|$ contient le système $|iC_1|$, et ce système jouit de la propriété d'invariance. Il se peut que le système $|C_a|$ ne contienne pas $|C|$, ni le système $|2C_a|$ le système $|2C|$, mais qu'on puisse déterminer l'entier i de manière que le système $|iC_a|$ contienne $|iC|$. Le *système i fois canonique* ainsi défini fournira alors de nouveaux caractères invariants de la surface, en particulier le nombre P_i des courbes *i fois canoniques* qui sont linéairement indépendantes, le genre de ces courbes, etc.

Il peut arriver que le système $|K_i|$ n'existe pas, quel que soit i. On le vérifie de suite pour le plan, pour une surface réglée quelconque et, en général, pour toute surface contenant un système $|C|$ de genre π, dont deux courbes ont plus de $2\pi - 2$ intersections variables.

Quelques remarques relatives aux surfaces réglées (1).

48. Nous avons laissé de côté, dans la section précédente, les surfaces réglées et plus généralement les surfaces sur lesquelles existent un système linéaire de courbes $|C|$ et un faisceau de courbes $|D|$, linéaire ou non, tels que la courbe générale du premier ne soit coupée qu'en un point par la courbe générale du se-

(1) *Voir* à ce sujet différents passages de l'*Introduzione* de M. Enriques, particulièrement les nos 21 et 24.



cond D, qui est alors forcément unicursale. De pareilles surfaces ont d'ailleurs évidemment pour images des surfaces réglées sur lesquelles les courbes correspondant au système $|C|$ sont des directrices.

Nous avons déjà vu (t. I, p. 194) que pour ces surfaces, sur lesquelles il existe un faisceau de courbes unicursales, le genre géométrique p_g était nul, et nous avons trouvé, pour les surfaces réglées (t. I, p. 241), une valeur de p_n égale à $-\pi$, π étant le genre d'une section plane quelconque de la surface.

Pénétrons un peu plus avant dans l'étude de ces surfaces, et demandons-nous si les différents théorèmes qui nous ont servi, dans ce Chapitre, pour établir l'invariance de p_n sont applicables aux surfaces réglées. En d'autres termes, l'égalité fondamentale

$$p_g - p_n = \Sigma \omega_h$$

est-elle applicable aux surfaces réglées?

Pour l'établir nous sommes partis de ce fait, à savoir que sur une surface f de degré m, dont $|C|$ est le système des sections planes, le système adjoint au système $|(r+1)C|$ était déterminé par les surfaces adjointes d'ordre $m-3+r$ (Chap. VI, n[os] 14 et 39). Si cette propriété s'applique aux surfaces réglées, on verra facilement, sans qu'il soit besoin d'insister, comment on peut conclure à l'invariance de $\delta(rC)$ et aux autres formules fondamentales qui y sont relatives.

Nous nous proposons donc de démontrer que :

Sur une surface réglée d'ordre m, les courbes adjointes au système $|(r+1)C|$, $|C|$ étant le système des sections planes, sont les intersections de cette surface, en dehors des courbes multiples, avec les surfaces adjointes d'ordre $m-3+r$.

49. Voici d'abord un premier lemme relatif aux surfaces qui possèdent un faisceau de courbes unicursales D. Ce faisceau peut ne pas être linéaire, mais il est évident qu'on peut former avec ses courbes un faisceau linéaire de courbes dont chacune sera composée d'un certain nombre s suffisamment grand de courbes D; soit

$$\alpha_0 M_0 + \alpha_1 M_1 = 0, \tag{1}$$

le système de surfaces, qui détermine ce faisceau.

Soit alors sur la surface un système linéaire irréductible $|C|$ de courbes, dont la courbe générale coupe une courbe D en $\rho > 1$ points variables, et soit

$$(2) \qquad \alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \ldots = 0,$$

le système de surfaces qui le détermine, et dont nous ne considérerons qu'un réseau. Au moyen des deux systèmes précédents, on peut, comme nous l'avons vu (t. I, p. 202), obtenir une image F de la surface qui soit telle que les courbes du faisceau (1) correspondent aux sections planes faites sur la surface F par un faisceau de plans passant par une droite a et que les courbes du système $|C|$ soient représentées par les sections planes d'un réseau de plans passant par un point O pris en dehors de a.

La droite a pourra d'ailleurs être une droite multiple de la surface F; soit i son degré de multiplicité. Un plan quelconque passant par a coupera la surface suivant s courbes D, et un plan passant par O coupera une courbe D en ρ points, de sorte que chacune de ces courbes est, sur la surface F, d'ordre ρ, et l'ordre m de la surface est par suite égal à

$$m = i + s\rho.$$

De plus, la surface F n'est pas réglée. Le système des courbes adjointes à $|C|$ sera donc compris dans le système des courbes sous-adjointes déterminées par des surfaces sous-adjointes Ψ_{m-3} à F, lesquelles ont la droite a comme courbe multiple d'ordre $i-1$. Une surface Ψ_{m-3} coupera donc un plan arbitraire passant par a suivant une courbe d'ordre $m-2-i$ qui devra être adjointe à la courbe plane correspondante de la surface F, composée de s courbes D. Or une pareille adjointe appartient, comme nous l'avons vu, au système somme de $s-1$ courbes D et d'une adjointe d'ordre $m-2-i-(s-1)\rho = \rho-2$ à la $s^{\text{ième}}$ courbe D située dans le plan considéré. De plus, deux courbes D, qui n'ont aucun point variable d'intersection, ont en commun leurs points multiples, qui appartiennent aux lignes multiples de F, et dont le nombre, puisque la courbe D est unicursale, est équivalent à $\frac{(\rho-1)(\rho-2)}{2}$ points doubles.

Le nombre des points d'intersection variables d'une pareille



adjointe avec une courbe D sera donc égal à

$$(m-2-i)\rho-(\rho-1)(\rho-2)-(s-1)\rho^2=\rho-2.$$

D'où l'énoncé du lemme que nous avions en vue :

Sur une surface possédant un faisceau de courbes rationnelles D, *les courbes adjointes à un système linéaire irréductible* $|C|$ *dont la courbe générale est coupée en* ρ *points variables par une courbe* D, *coupent cette courbe* D *en* $\rho-2$ *points au plus.*

Nous disons *au plus* puisque nous avons considéré le système des surfaces sous-adjointes.

50. Comme première conséquence de ce lemme nous voyons que *si* $\rho=1$ (c'est le cas des surfaces réglées), *le système* $|C|$ *n'admettra pas de courbes adjointes*. Si, en effet, le système $|C|$ admettait un système adjoint $|C_a|$ le système $|2C|$ aurait pour système adjoint $|C+C_a|$, dont la courbe générale couperait la courbe D en un point au moins, ce qui est impossible puisqu'une courbe $2C$ coupe une courbe D en deux points et qu'une courbe adjointe à $|2C|$ ne peut couper cette courbe D qu'en $\rho-2=0$ points au plus.

Par suite encore *une surface réglée d'ordre* m *ne possède pas de surface adjointe d'ordre* $m-3$.

51. Ce dernier résultat peut d'ailleurs se déduire immédiatement d'une remarque générale relative au nombre des points de rencontre d'une surface adjointe Φ_{m-3+r} à F, si elle existe, avec une génératrice de F. Un plan passant par une génératrice a coupe en outre la surface F suivant une courbe C d'ordre $m-1$, qui coupe la génératrice, en dehors des courbes multiples, en *un seul* point variable avec le plan, de sorte que le nombre des points de rencontre de la génératrice avec les courbes multiples est équivalent à $m-2$.

D'autre part, la section par ce plan d'une surface adjointe Φ_{m-3+r} est une courbe d'ordre $m-3+r$ qui passe par les points multiples fixes de C sur la droite a, et s'y comporte comme cette courbe; donc elle coupe a en $r-1$ points, et, par conséquent :

Les surfaces Φ_{m-3+r} adjointes à une surface réglée F *d'ordre m coupent les génératrices, en dehors des courbes multiples, en $r-1$ points variables.*

52. Ces préliminaires étant posés, nous sommes en mesure de démontrer la proposition énoncée au n° 48. Soit C_a^{r+1} une courbe adjointe au système $|(r+1)C|$, c'est-à-dire au système découpé par les surfaces d'ordre $r+1$. On verrait d'abord facilement qu'elle coupe la section plane générale C en un groupe de points qui appartiennent à une adjointe plane d'ordre $m-3+r$. Reprenons alors la proposition démontrée précédemment (n° 20 de ce Chapitre), en vertu de laquelle toute courbe qui jouit de la propriété de couper un plan arbitraire suivant un groupe de la série $g_{2\pi-2+rm}$ appartient à une surface sous-adjointe d'ordre $m-3+r$, sauf le cas, laissé de côté, où la surface serait réglée. En procédant de la même manière, on voit d'abord que la courbe C_a^{r+1} est la section partielle de F, en dehors des courbes multiples, avec une surface adjointe $\Phi_{m-3+r+\rho}$ ($\rho \geqq 0$), et qui peut contenir encore une ou plusieurs courbes planes, appartenant à des plans passant par l'axe d du faisceau de plans qui a servi à construire la surface Φ.

Ces courbes, qui rencontrent la droite d aux points où elle coupe la surface F, ne peuvent être, dans le cas actuel, que des génératrices de la surface, et, dans tous les cas, ce sont des courbes qui n'ont aucune intersection variable avec le plan général du faisceau. Les points de rencontre variables de la surface $\Phi_{m-3+r+\rho}$ avec une génératrice arbitraire, en nombre $r+\rho-1$ (n° 51), sont donc les points de rencontre variables de cette génératrice et de la courbe C_a^{r+1}. Or la courbe générale du système $|(r+1)C|$ coupe une génératrice en $r+1$ points, par suite, en vertu du lemme du n° 49, la courbe C_a^{r+1} ne peut couper la génératrice qu'en $(r+1)-2=r-1$ points au plus, ce qui exige $\rho=0$, d'où le théorème énoncé (n° 48) et qui complète le théorème du n° 20 :

Sur une surface réglée ou non d'ordre m, les courbes adjointes au système découpé par les surfaces d'ordre $r+1$ ($r>0$) sont les sections de cette surface, en dehors des courbes multiples, par des surfaces adjointes d'ordre $m-3+r$.

53. De ce théorème résulte, comme nous l'avons dit, que les différentes propositions que nous avons énoncées relativement à l'invariance de p_n s'appliquent aux surfaces sur lesquelles existe un système linéaire de courbes dont la courbe générale n'est coupée qu'en un point par la courbe générale d'un faisceau de courbes unicursales. Nous en ferons une application au calcul du genre numérique d'une surface réglée.

Une surface réglée d'ordre m a des équations qui peuvent toujours s'écrire sous la forme

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q,$$
$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

a, b, p, q étant des fonctions rationnelles de α et β, et $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ étant une courbe algébrique plane dont le genre π est le genre d'une section plane de la surface.

A cette surface correspond donc birationnellement le cylindre $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, ou plus généralement un cône d'ordre m, et dont la section plane est de genre π, et dont le genre numérique p_n sera celui de la surface réglée.

Nous sommes ramenés ainsi à calculer le genre numérique p_n d'un cône d'ordre m avec d droites doubles. Or une surface adjointe d'ordre μ a le sommet comme point multiple d'ordre $m - 2$, soit

$$\frac{(m-2)(m-1)m}{6}$$

conditions. Elle doit contenir, en outre, chacune des d droites doubles, soit

$$d[\mu + 1 - (m-2)]$$

conditions. Donc la dimension augmentée de un du système des adjointes d'ordre μ est *numériquement*

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{6} - \frac{m(m-1)(m-2)}{6} - d(\mu + 3 - m),$$

et par suite le genre numérique p_n $(\mu = m - 4)$ est égal à

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} - 1$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + d = d - \frac{(m-1)(m-2)}{2} = -\pi,$$

résultat que nous avions obtenu par une autre voie (t. I, p. 241).

54. Cherchons quelles sont, pour une surface réglée, les valeurs des défauts $\delta(rC)$ et ω_h.

De la formule

$$N_{m-4+r+1} = N_{m-4+r} + \pi + rm + \delta(rC) - \delta[(r+1)C] + \frac{r(r-3)}{2},$$

on conclut, puisqu'une surface réglée n'a ni surface adjointe d'ordre $m-4$, ni surface adjointe d'ordre $m-3$ ($N_{m-4} = N_{m-3} = -1$), en faisant $r=0$,

$$\delta(C) = \pi.$$

Appliquant ensuite la relation

$$\delta[(r+1)C] - \delta(rC) = \omega_{m-3+r},$$

on trouve

$$\delta(C) = \omega_{m-3} = \pi;$$

et enfin de la relation

$$p_g - p_n = \Sigma\omega_h,$$

qui se réduit ici à

$$\pi = \Sigma\omega_h,$$

on conclut

$$\omega_{m-2} = \omega_{m-1} = \ldots = 0,$$

et par suite

$$\delta(C) = \delta(2C) = \ldots = \delta(rC) = \pi.$$

La valeur maximum de $\delta(rC)$ est donc π, et tous les défauts ω_h sont nuls à partir de $h = m-2$, le premier ω_{m-3} ayant une valeur *virtuelle* égale à π.

55. Terminons par une remarque relativement au système de courbes déterminé sur une surface réglée par les surfaces adjointes d'ordre $m-2$. En vertu du théorème démontré (n° 51), ces surfaces adjointes ne peuvent couper la surface que suivant des génératrices, puisque le nombre $r-1$ des points d'intersection variables est ici égal à *zéro* ($r=1$). D'autre part, nous venons de voir que les surfaces adjointes d'ordre $m-2$ coupent un plan arbitraire suivant le système total des adjointes planes de même ordre à la section plane correspondante de la surface réglée ($\omega_{m-2} = 0$). Donc *le système des surfaces adjointes d'ordre $m-2$ détermine sur cette surface un système de dimension*

$\pi - 2 + m$ *dont chaque courbe est composée de* $2\pi - 2 + m$ *génératrices.*

Les systèmes de courbes déterminés par les surfaces adjointes d'ordre $m - 2 + h$ s'obtiendront successivement en ajoutant au système précédent le système des sections planes $|C|$, le système $|2C|$, ..., le système $|hC|$.

Nous avons dit que sur une surface réglée il n'existait pas de système adjoint au système des sections planes d'ordre $m - 3$, mais il est possible de construire un système de courbes sous-adjointes à ces sections planes, composées chacune d'un nombre convenable de génératrices. Le point à remarquer est qu'un pareil système ne peut être obtenu comme la *section totale,* en dehors des courbes multiples, de la surface réglée par un système de surfaces adjointes.

CHAPITRE VII.

SUR LES INTÉGRALES DOUBLES DE SECONDE ESPÈCE [1].

I. — Première définition des intégrales de seconde espèce.

1. On sait combien, dans la théorie des fonctions algébriques, la distinction des intégrales abéliennes en *trois* espèces joue un rôle important. Dans un grand nombre de questions, les intégrales de *première* et de *seconde* espèce sont particulièrement intéressantes à considérer. Il est naturel de chercher à faire pour les intégrales doubles attachées à une surface algébrique, c'est-à-dire pour les intégrales doubles

$$\iint R(x,y,z)\,dx\,dy \qquad [f(x,y,z)=0]$$

(où R est rationnelle en x, y et z), une classification plus ou moins analogue. Nous avons vu, dans le cours de cet Ouvrage, l'importance des intégrales doubles de *première* espèce attachées à une surface.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de poser les bases d'une théorie des intégrales doubles de *seconde espèce* dans la théorie des surfaces algébriques, et de montrer comment la notion d'intégrale de seconde espèce conduit à un nombre invariant, qui paraît distinct de ceux qui ont été considérés jusqu'ici.

Considérons une surface algébrique

$$f(x,y,z)=0$$

---

[1] E. Picard, *Sur les intégrales doubles de seconde espèce* (*Comptes rendus,* 6 décembre 1897 et 24 janvier 1898; *Journal de Mathématiques,* 1899; *Comptes rendus*, 10 octobre 1899).

et soit une intégrale double relative à cette surface

$$\iint R(x, y, z)\, dx\, dy, \tag{1}$$

R étant rationnelle en x, y et z. Nous allons tout d'abord définir ce que nous entendons par *intégrale double de seconde espèce*.

Prenons sur la surface un point arbitraire A, que l'on peut toujours, par une transformation préalable, supposer à distance finie. Si le point A est un point simple, nous dirons que l'intégrale (1) présente le *caractère* d'une intégrale de seconde espèce, si l'on peut trouver deux fonctions rationnelles U et V de x, y, z, telles que, après avoir formé l'intégrale double

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy, \tag{2}$$

la différence des intégrales (1) et (2) reste finie au voisinage de A (on considère, bien entendu, z comme fonction de x et y quand on prend les dérivées partielles de U et V par rapport à x et y). Si le point A est un point multiple de f, on sait que l'on peut partager le voisinage de A en un certain nombre de régions, telles que chacune d'elles corresponde birationnellement à une région R située sur une surface F, et ne comprenant que des points simples de F; l'intégrale (1) présentera en A le caractère d'une intégrale de seconde espèce, si ses transformées, par chacune des substitutions birationnelles à employer, présentent, en tous les points de la région correspondante R de la surface correspondante F, le caractère d'une intégrale de seconde espèce. Si, en tout point A de la surface f (à distance finie ou à l'infini), l'intégrale (1) présente le caractère d'une intégrale de seconde espèce, *cette intégrale sera dite une intégrale double de seconde espèce*. Il est clair que les fonctions rationnelles U et V à employer pourront varier avec le point A.

2. Il importe tout d'abord de remarquer que la forme des expressions (2) est de nature *invariante* relativement aux transformations birationnelles. On s'en assure de la manière suivante. Envisageons d'abord l'intégrale

$$\iint \frac{D(P, Q)}{D(x, y)}\, dx\, dy, \tag{3}$$

où $\frac{D(P, Q)}{D(x, y)}$ représente le déterminant fonctionnel des deux fonctions P et Q de x et y; si l'on remplace les variables x et y par de nouvelles variables x' et y', l'intégrale devient évidemment

$$\int\int \frac{D(P, Q)}{D(x', y')} dx' \, dy'$$

et garde par suite la même forme. Or, l'intégrale (3) rentre manifestement dans le type (2), puisqu'on peut l'écrire

$$\int\int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(P \frac{\partial Q}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right] dx \, dy.$$

Ceci posé, on peut donner à (2) la forme suivante :

$$\int\int \frac{D(U, y)}{D(x, y)} dx \, dy + \int\int \frac{D(x, V)}{D(x, y)} dx \, dy;$$

en faisant un changement de variables, on aura

$$\int\int \frac{D(U, y)}{D(x', y')} dx' \, dy' + \int\int \frac{D(x, V)}{D(x', y')} dx' \, dy'$$

et, d'après ce que nous venons de dire, chaque terme de cette somme et, par suite, la somme se mettent sous la forme

$$\int\int \left(\frac{\partial U_1}{\partial x'} + \frac{\partial V_1}{\partial y'} \right) dx' \, dy'.$$

L'intégrale (2) a donc conservé la même forme quand on a remplacé les variables x et y par les variables x' et y'; c'est *l'invariance que nous voulions établir*.

3. Remarquons, avant de continuer, qu'une définition analogue à celle que nous venons de donner pour les intégrales doubles de seconde espèce peut être adoptée pour les intégrales simples de seconde espèce dans la théorie des courbes algébriques. Si l'on a la courbe

$$f(x, y) = 0,$$

les intégrales abéliennes de seconde espèce

$$\int R(x, y) \, dx,$$

relatives à cette courbe sont telles que, pour tout point A de la courbe, on peut trouver une fonction rationnelle $U(x, y)$, telle que la différence

$$\int R(x, y)\, dx - \int \frac{dU}{dx}\, dx$$

reste finie dans le voisinage de A.

4. On sait que, pour une courbe algébrique, il n'existe qu'un nombre *limité* d'intégrales abéliennes distinctes de seconde espèce, c'est-à-dire qu'il existe un nombre *limité* d'intégrales abéliennes J de seconde espèce, dont aucune combinaison linéaire n'est de la forme

$$(\alpha) \qquad \int \frac{dU}{dx}\, dx$$

(U étant rationnelle en x et y), et telles que toute autre intégrale de seconde espèce est une combinaison linéaire des intégrales J, à un terme additif près de la forme (α).

Nous devons nous demander s'il en est de même dans la théorie des surfaces algébriques. Nous allons montrer, pour répondre à cette question, qu'*il existe un nombre limité* ρ *d'intégrales* J *de seconde espèce, dont aucune combinaison linéaire n'est de la forme*

$$(\beta) \qquad \iint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy$$

(P et Q étant rationnelles en x, y et z), *et telles que toute autre intégrale de seconde espèce est une combinaison linéaire des intégrales* J, *à un terme additif près de la forme* (β). La démonstration de ce résultat sera la conséquence d'une longue suite de transformations de calculs qui vont faire l'objet des sections suivantes. Nous aurons ensuite à montrer qu'une intégrale double de seconde espèce relative à une surface f se change, quand on transforme birationnellement f en une surface F, en une intégrale de seconde espèce de la surface F. Ce fait ne résulte pas seulement du calcul du n° 2 et demandera quelques explications complémentaires.

II. — Remarques générales.

5. Commençons par étudier les intégrales de seconde espèce ayant la forme particulière

$$(4) \qquad \iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^{\alpha} f'_z} \qquad (\alpha > 0 \text{ et P étant un polynome}),$$

en supposant que la surface de degré m

$$f(x, y, z) = 0$$

occupe une position arbitraire par rapport aux axes de coordonnées. Envisageons l'intégrale simple

$$(5) \qquad \int \frac{P(x, \overline{y}, z)\,dx}{(x-a)^{\alpha} f'_z}$$

relative à la courbe entre x et z

$$f(x, \overline{y}, z) = 0,$$

où y est un paramètre. On sait que, par la soustraction d'une expression de la forme

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{Q(x, z)}{(x-a)^{\alpha-1}}\right) dx,$$

on peut ramener l'intégrale (5) à une intégrale analogue, où α est remplacé par $\alpha - 1$. Toutefois les coefficients du polynome $Q(x, z)$ en x et z étant des fractions rationnelles de y, il figurera dans la nouvelle intégrale, au dénominateur, un polynome en y. Il importe d'examiner de quelle manière y figure dans ce dénominateur. Soient $z_1, z_2, \ldots, z_m$ les m racines de l'équation

$$f(a, \overline{y}, z) = 0;$$

le polynome $Q(x, z)$ est seulement assujetti à vérifier les équations

$$(\alpha - 1) f'_z(a, \overline{y}, z_i)\, Q(a, z_i) + P(a, \overline{y}, z_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Il suffira de prendre pour $Q(x, z)$ un polynome en z de degré

$m - 1$, et il est clair que ses coefficients contiendront, en dénominateur, le résultant des deux équations

$$f(a, y, z) = 0, \qquad f'_z(a, y, z) = 0.$$

Notre dénominateur admettra donc pour racines simples les valeurs de y correspondant aux points de la courbe

$$f(a, y, z) = 0,$$

où la tangente est parallèle à l'axe des z, et pour racines doubles les valeurs de y correspondant aux points doubles de cette courbe, si la courbe n'a que des points doubles. Soit d'une manière générale $\Delta(y)$ ce résultant; l'intégrale (4), par la soustraction d'une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{\partial U}{\partial x}\, dx\, dy$$

(où U est rationnelle en x, y, z), se trouve ramenée à une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)^{\alpha-1}\Delta(y) f'_z}.$$

En continuant de la même manière, on arrivera évidemment à une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)[\Delta(y)]^{\alpha-1} f'_z},$$

P étant toujours un polynome.

6. Puisque l'intégrale précédente est de seconde espèce, on peut, dans le voisinage d'un point arbitraire de la courbe [1]

$$(\gamma) \qquad x = a, \qquad f(x, y, z) = 0,$$

---

[1] On peut supposer que cette courbe est indécomposable, car, les axes de coordonnées étant arbitrairement choisis, les plans

$$x = \text{const.}$$

coupent tous la surface suivant une seule courbe, en laissant de côté la surface de Steiner et les surfaces réglées, d'après un résultat précédemment énoncé.

retrancher une intégrale double de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy$$

de telle sorte que la différence reste finie dans le voisinage du point. Les fractions rationnelles U et V sont nécessairement de la forme

$$U = \frac{A(x, y, z)}{(x - a)^{\lambda}}, \qquad V = \frac{B(x, y, z)}{(x - a)^{\mu}},$$

A et B étant encore des fractions rationnelles, mais qui ne deviennent pas infinies, et nous supposons que B ne s'annule pas identiquement sur la courbe γ.

Si λ est supérieur à $\mu - 1$, A s'annule nécessairement pour $x = a$, et par suite on peut, de proche en proche, réduire λ à $\mu - 1$. On peut d'ailleurs dans tous les cas supposer

$$\lambda = \mu - 1$$

en multipliant, s'il est nécessaire, les deux termes de U par une puissance de $x - a$.

Nous avons donc l'expression

$$(\delta) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{A(x, y, z)}{(x - a)^{\mu-1}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{B(x, y, z)}{(x - a)^{\mu}}\right].$$

Si μ est supérieur à *un*, la différence

$$-(\mu - 1)A(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} B(x, y, z)$$

s'annulera nécessairement pour la courbe (γ), c'est-à-dire que l'on aura

$$-(\mu - 1)A(a, y, \zeta) + \frac{\partial}{\partial y} B(a, y, \zeta) = 0 \quad [\text{avec } f(a, y, \zeta) = 0].$$

On en conclut que l'expression (δ), qui peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{A(x, y, z)}{(x - a)^{\mu-1}} - \frac{1}{\mu - 1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{B(x, y, z)}{(x - a)^{\mu-1}}\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{B(x, y, z)}{(x - a)^{\mu}} + \frac{1}{\mu - 1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{B(x, y, z)}{(x - a)^{\mu-1}}\right]$$

est de même forme que (δ), sauf que μ y est remplacé par $\mu - 1$. Donc, en allant de proche en proche, on peut supposer $\mu = 1$, et, par suite, la différence

$$\frac{P(x, y, z)}{[\Delta(y)]^{\alpha-1} f'_z} - \frac{\partial}{\partial y} B(x, y, z)$$

doit s'annuler pour $x = a$. On en conclut que

$$\frac{P(a, y, \zeta)}{[\Delta(y)]^{\alpha-1} f'_\zeta} = \frac{\partial}{\partial y} B(a, y, \zeta),$$

ζ étant la fonction de y définie par $f(a, y, \zeta) = 0$. La fonction rationnelle $B(a, y, \zeta)$ pourra nécessairement se mettre sous la forme

$$\frac{S(y, \zeta)}{U(y)},$$

S et U étant des polynomes, et les racines de $U(y)$ appartenant à $\Delta(y)$. Ceci posé, formons la différence

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)(\Delta y)^{\alpha-1} f'_z} - \iint \frac{\partial}{\partial y} \frac{S(y, z)}{(x-a)\, U(y)}\, dx\, dy.$$

Elle sera de la forme

$$\iint \frac{Q(x, y, z)}{W(y)} \frac{dx\, dy}{f'_z},$$

Q et V étant des polynomes et les racines de $W(y)$ appartenant à $\Delta(y)$.

III. — Première réduction, dans le cas des surfaces sans singularités.

7. Les transformations précédentes vont bientôt nous être utiles. Nous allons maintenant revenir à l'intégrale

$$\iint \frac{P(x, y, z)}{(x-a)^\alpha f'_z}\, dx\, dy,$$

supposée de seconde espèce, en supposant que la surface n'ait pas de singularités. Considérons d'abord le cas où le plan $x = a$

n'est pas tangent à la surface. Il va être facile dans ce cas d'effectuer une réduction en supposant $\alpha > 1$. Je dis qu'on peut déterminer deux *polynomes* $A(x, y, z)$ et $B(x, y, z)$, de telle sorte que l'intégrale

$$\iint \left[\frac{P(x,y,z)}{(x-a)^\alpha f'_z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{A(x,y,z)}{(x-a)^{\alpha-1}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{B(x,y,z)}{(x-a)^\alpha} \right] dx\, dy$$

soit de même forme que l'intégrale initiale, α étant remplacé par $\alpha - 1$. Il suffira que

$$P + (\alpha - 1) A f'_z - \left(f'_z \frac{\partial B}{\partial y} - f'_y \frac{\partial B}{\partial z} \right)$$

passe par la courbe $x = a$, $f(x, y, z) = 0$.

Prenons pour A et B des polynomes en y et ζ; l'expression

$$P(a, y, \zeta) + (\alpha - 1) A f'_\zeta - \left(f'_\zeta \frac{\partial B}{\partial y} - f'_y \frac{\partial B}{\partial \zeta} \right)$$

devra être divisible par $f(a, y, \zeta)$; ou bien encore, y et ζ étant deux lettres indépendantes, il faut mettre le polynome $P(a, y, \zeta)$ sous la forme

$$P(a, y, \zeta) = \lambda f'_y + \mu f'_\zeta + \nu f \qquad [\text{où } f \text{ désigne } f(a, y, \zeta)],$$

λ, μ et ν étant des polynomes en y et ζ.

Or, puisque le plan $x = a$ n'est pas tangent à la surface, la courbe $f(a, y, \zeta) = 0$ n'a pas de points multiples : les trois polynomes f, f'_y, f'_ζ ne s'annulent pas simultanément. De plus on peut toujours supposer que les solutions communes aux deux équations

$$f = 0, \qquad f'_\zeta = 0$$

sont des solutions *simples;* il suffit que l'axe des ζ ne soit pas parallèle à une tangente d'inflexion de la courbe $f(a, y, \zeta) = 0$. Ceci posé, on peut choisir le polynome $\lambda(y, \zeta)$ de manière que la différence

$$P(a, y, \zeta) - \lambda f'_y$$

s'annule pour les points communs à

$$f = 0, \qquad f'_\zeta = 0.$$

On aura donc

$$P(a, y, \zeta) - \lambda f'_y = \mu f'_\zeta + \nu f,$$

μ et ν étant des polynomes en y et ζ, et de là se tirent A et B.

Nous pouvons donc conclure que, sous les hypothèses faites, *l'intégrale proposée se ramène à*

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a) f'_z}.$$

8. L'intégrale étant de seconde espèce, nous pouvons faire une réduction encore plus complète. En raisonnant comme au n° 6, on voit que l'on doit avoir

$$\frac{P(a, y, \zeta)}{f'_\zeta} = \frac{\partial}{\partial y} B(a, y, \zeta) \qquad [f(a, y, \zeta) = 0].$$

La fraction rationnelle $B(a, y, \zeta)$ sera nécessairement un polynome $S(y, \zeta)$ en y et ζ [la courbe $f(a, y, \zeta) = 0$ n'ayant pas de point double]. Si l'on considère alors la différence

$$\iint \left[\frac{P(x, y, z)}{(x-a) f'_z} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{S(y, z)}{x-a} \right] dx\, dy,$$

elle sera de la forme

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

où P est un polynome. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

La surface $f(x, y, z) = 0$ n'ayant pas de singularités, et le plan $x = a$ n'étant pas tangent à la surface, une intégrale de seconde espèce de la forme

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)^\alpha f'_z} \qquad (\text{P étant un polynome})$$

se ramène par la soustraction d'intégrales du type

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx\, dy \qquad (\text{U et V rationnels en } x, y \text{ et } z)$$

à une intégrale de la forme

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

P étant toujours un polynome.

9. Le même théorème subsiste si le plan $x = a$ est tangent à la surface. Nous pouvons le démontrer très facilement en nous reportant au résultat du n° 6. Par la soustraction d'une intégrale de forme convenable, nous avons ramené l'intégrale

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z}$$

à la forme

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{W(y) f'_z},$$

chaque racine b de $W(y)$ correspondant à un point où la courbe

$$f(a, y, z) = 0$$

a sa tangente parallèle à l'axe des z. Or, les axes occupant une position arbitraire par rapport à la surface, on peut supposer qu'aucun des plans $y = b$ n'est tangent à la surface. Nous sommes donc ramené au cas précédent (x et y étant permutés), et *nous avons le théorème énoncé à la fin du numéro précédent, même si le plan $x = a$ est tangent à la surface.*

10. Nous avons supposé que les axes occupent une position arbitraire par rapport à la surface; les plans considérés $x = a$ coupaient alors la surface suivant une courbe irréductible. Il est facile d'examiner le cas où il en serait autrement. Supposons que le plan $x = a$ coupe la surface suivant une courbe décomposable en *deux* autres, et soit A un point commun à ces deux courbes. Reprenons l'intégrale

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z}.$$

Nous pouvons d'ailleurs, comme plus haut, faire les réductions

qui nous ramèneront à l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)W(y)f'_z}.$$

On peut, dans le voisinage de A, retrancher une intégrale double de la forme

$$\int\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

de telle sorte que la différence reste finie dans le voisinage du point. En raisonnant comme au n° 6, on voit que cette dernière intégrale est de la forme

$$\int\int \frac{1}{x-a} \frac{\partial}{\partial y} B(x, y, z)\,dx\,dy,$$

la fraction rationnelle $B(x, y, z)$ ne devenant pas identiquement infinie sur la section plane $x = a$. Il n'y a dans tout ceci aucune différence avec le n° 6, si ce n'est que dans ce numéro nous nous placions au voisinage d'un point *quelconque* de la section plane, tandis que nous nous plaçons ici au voisinage du point *particulier* A; d'ailleurs, la courbe désignée (*loc. cit.*) par (γ) est l'ensemble des deux courbes passant par le point A. On aura donc

$$\frac{P(a, y, z)}{W(y)f'_z(a, y, z)} = \frac{\partial}{\partial y} B(a, y, z),$$

pour l'une et l'autre courbe que définit l'équation $f(a, y, z) = 0$. Or, on peut toujours mettre la fonction rationnelle $B(x, y, z)$ sous la forme

$$B(x, y, z) = \frac{Q(x, y, z)}{R(x, y)} \qquad (\text{Q étant un polynome}),$$

le polynome $R(x, y)$ ne contenant pas $(x-a)$ en facteur (sinon B serait infinie au moins sur une des courbes de la section $x = a$). Si donc de l'intégrale proposée

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)W(y)f'_z}$$

on retranche

$$\int\int \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{x-a} \frac{Q(x, y, z)}{R(a, y)}\right] dx\,dy,$$

on aura une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{W(y) f'_z},$$

$W(y)$ étant un polynome en y. Comme le plan des zx peut être supposé avoir une direction arbitraire, on peut admettre qu'aucun plan de la forme

$$y = C$$

ne coupe la surface suivant une courbe décomposable (en faisant abstraction de la surface de Steiner et des surfaces réglées), et finalement nous arrivons à la même conclusion qu'au numéro précédent.

Les considérations précédentes peuvent servir, d'une manière plus générale, à faire la réduction de l'intégrale de seconde espèce

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^{\alpha} R(x, y) f'_z},$$

le polynome $R(x, y)$ ne contenant pas $x - a$ en facteur; on ramènera cette intégrale, par la soustraction d'une intégrale de la forme déjà plusieurs fois indiquée, à l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{V(y) R(x, y) f'_z}.$$

11. En restant toujours dans le cas d'une surface sans singularités, nous allons considérer une intégrale arbitraire de seconde espèce. Les axes étant pris arbitrairement, nous pouvons supposer que l'intégrale reste en général finie dans le voisinage d'un point pour lequel $f'_z = 0$; de plus C étant une ligne irréductible de la surface pour les points de laquelle l'intégrale peut devenir infinie, soit

$$R(x, y) = 0$$

la courbe irréductible qui est la projection de la ligne C sur le plan des xy. La surface cylindrique

$$R(x, y) = 0$$

pourra couper la surface f suivant une autre ligne irréductible que la ligne C.

Soit Γ cette seconde ligne; les courbes C et Γ ont au moins un point commun à distance finie que nous désignerons par A. L'intégrale double considérée peut évidemment se mettre sous la forme d'une somme d'intégrales du type

$$(\varepsilon) \qquad \iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{W(y)[R(x, y)]^{\alpha} f'_z}.$$

En effet, toute fraction rationnelle de x, y, z peut s'écrire

$$\frac{A(x, y, z)}{B(x, y)},$$

A et B étant deux polynomes, le premier en x, y, z, le second en x et y. En regardant

$$\frac{1}{B(x, y)}$$

comme une fraction rationnelle de x, on la décomposera en fractions plus simples, dont les dénominateurs, en tant que polynomes en x, soient premiers entre eux et puissances d'un polynome en x et y; mais dans cette décomposition pourront s'introduire au dénominateur des polynomes en y, figurés par $W(y)$. Considérons donc l'intégrale (ε); dans le voisinage du point A, on doit pouvoir trouver deux fractions rationnelles $S(x, y, z)$ et $T(x, y, z)$ telles que la différence

$$\iint \left\{ \frac{P(x, y, z)}{f'_z W(y)[R(x, y)]^{\alpha}} - \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y} \right\} dx\,dy$$

reste finie dans le voisinage de A. En décomposant S et T en fractions simples, nous avons, pour la somme $\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}$, des éléments de la forme

$$\frac{H(x, y, z)}{W_1(y)[\rho(x, y)]^{\lambda} f'_z}.$$

En se bornant, dans S et T, au terme renfermant nécessairement en dénominateur une puissance de R, nous avons une intégrale de la forme

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{W(y)[R(x, y)]^{\beta} f'_z},$$

qui, dans le voisinage de A (ce point pouvant être exclu), ne devient pas infinie sur la courbe

$$R(x, y) = 0,$$

c'est-à-dire sur les deux courbes C et Γ; il faut donc que

$$\frac{P(x, y, z)}{[R(x, y)]^\beta}$$

reste finie pour $R(x, y) = 0$, dans le voisinage de A, et, par suite, soit un polynome en x, y et z (on peut appliquer ici le théorème classique de Nœther, puisque C et Γ forment l'intersection complète de $R = 0$ avec la surface f).

On voit donc que finalement l'intégrale sera ramenée à

$$(\eta)\qquad \iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{W(y) f'_z},$$

et finalement à

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}.$$

Nous avons donc la proposition fondamentale suivante :

Si l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

représente une surface sans singularités, toutes les intégrales de seconde espèce relatives à cette surface sont de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dy + \iint \frac{P(x, y, z)}{f'_z}\,dx\,dy,$$

U *et* V *étant des fonctions rationnelles en* x, y *et* z, *et* $P(x, y, z)$ *représentant un polynome.*

IV. — Même réduction pour les surfaces quelconques.

12. Le théorème que nous venons d'établir est général. Une partie de la démonstration précédente subsiste entièrement; c'est celle qui est contenue dans le numéro précédent et qui s'arrête

à la forme (η). En permutant x et y, nous voyons donc que toutes les intégrales de seconde espèce se ramènent aux intégrales

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{W(x) f'_z},$$

et nous devons donc étudier les intégrales de la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)^\alpha f'_z}.$$

La surface, nous pouvons le supposer, n'a que des singularités ordinaires (une ligne double avec points triples). On peut, de plus, admettre que l'intégrale initiale ne devient pas, *en général,* infinie le long de la ligne double (il suffirait, s'il en était autrement, de faire une transformation birationnelle convenable); *il en résulte que* P *s'annule le long de la courbe double*. Enfin les axes de coordonnées ont une position arbitraire par rapport à la surface.

Supposons d'abord que le plan $x = a$ ne passe pas par un point-pince ou par un point triple de la courbe double. Il y a alors peu de modifications à faire à la réduction du n° 7. Reprenons les notations et les calculs de ce paragraphe; nous devons chercher à mettre $P(a, y, \zeta)$ sous la forme

$$\lambda f'_y + \mu f'_\zeta + \nu f.$$

Le polynome $P(a, y, \zeta)$ s'annule d'ailleurs pour les points doubles de la courbe

$$f(a, y, \zeta) = 0.$$

Ici les trois polynomes f, f'_y, f'_ζ s'annulent simultanément, mais on peut supposer que f et f'_y n'ont de tangente commune en aucun de leurs points de rencontre. Il s'agit alors de savoir si l'on peut déterminer un polynome μ en y et ζ, de telle sorte que la différence

$$P - \mu f'_\zeta$$

soit de la forme $\lambda f'_y + \nu f$. Les points communs à

$$f = 0 \qquad \text{et} \qquad f'_y = 0$$

sont de deux sortes; les uns sont des points simples de f et n'appartiennent pas, par suite, à $f'_\zeta = 0$. On peut choisir le polynome μ de telle sorte que la différence $P - \mu f'_\zeta$ s'annule en ces points. Les autres sont points doubles de f; la différence précédente s'annule en ces points; mais il faut de plus que, pour chacun de ces points, la courbe

$$P - \mu f'_\zeta = 0$$

ait même tangente que la courbe $f'_y = 0$, et il est clair que l'on peut choisir μ de façon qu'il en soit ainsi, puisque $f'_y = 0$ et $f'_\zeta = 0$ ne sont pas tangentes en ces points.

Nous pouvons donc encore conclure que *le cas de α quelconque se ramène à $\alpha = 1$.*

13. On ne peut pas faire la même réduction si le plan $x = a$ *passe par un point-pince*. Pour qu'elle soit possible, c'est-à-dire pour qu'on puisse mettre $P(a, y, \zeta)$ sous a forme voulue, il faut et il suffit que la tangente à la courbe

$$P(a, y, \zeta) = 0,$$

au point-pince, soit la tangente au point de rebroussement dans la section plane $x = a$ [1].

Or, pour l'intégrale considérée

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)^\alpha f'_z},$$

la condition relative à la tangente pour la courbe $P(a, y, \zeta) = 0$ n'est pas remplie en général. Nous allons montrer que l'on peut,

---

[1] On établit facilement, à l'aide du théorème de Nœther, que, si

$$f(x, y) = 0$$

représente une courbe ayant des points doubles et des points de rebroussement ordinaires, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynome $P(x, y)$ soit susceptible de se mettre sous la forme

$$\lambda f + \mu f'_y + \nu f'_x \qquad (\lambda,\ \mu,\ \nu \text{ étant des polynomes}),$$

est que la courbe $P = 0$ passe par les points doubles de f, et aussi par les points de rebroussement avec la tangente à f en ces derniers points comme tangente.

par une soustraction convenable, être ramené à une intégrale de même forme, mais où la condition voulue sera remplie. Commençons par quelques remarques très importantes pour la suite.

14. J'envisage les expressions de la forme

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right),$$

U et V étant des polynomes en x, y, z.

Cherchons à quelle condition cette expression est de la forme

$$(\beta) \qquad \frac{M(x, y, z)}{f'_z},$$

$M(x, y, z)$ étant un polynome en x, y et z. En développant l'expression ci-dessus, on a

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{f'_z} + \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{f'_z} - \frac{\frac{\partial U}{\partial z}f'_y}{f'^2_z} - \frac{\frac{\partial V}{\partial z}f'_x}{f'^2_z} - \frac{U}{f'^2_z}\left(f''_{zy} - f''_{z^2}\frac{f'_y}{f'_z}\right) - \frac{V}{f'^2_z}\left(f''_{zx} - f''_{z^2}\frac{f'_x}{f'_z}\right).$$

Il n'y aura pas de terme en $\frac{1}{f'^3_z}$ si $Uf'_y + Vf'_x$ est divisible par f'_z, c'est-à-dire si l'on a l'identité en x, y et z,

$$(\gamma) \qquad Uf'_y + Vf'_x = Af'_z + Bf,$$

A et B étant deux polynomes. Nous allons voir que, dans ces conditions, l'expression proposée a la forme demandée. Il suffit de montrer qu'il ne reste pas alors de terme en $\frac{1}{f'^2_z}$; or le coefficient de $\frac{1}{f'^2_z}$ est égal à

$$-\frac{\partial U}{\partial z}f'_y - \frac{\partial V}{\partial z}f'_x - Uf''_{zy} - Vf''_{zx} + Af''_{z^2}.$$

En différentiant par rapport à z l'identité à laquelle satisfont U et V, on voit de suite que ce coefficient est de la forme

$$Kf'_z + Hf,$$

K et H étant des polynomes, et l'on a

$$K = -\frac{\partial A}{\partial z} - B.$$

Donc, l'expression (α) *sera de la forme* (β), *si* U *et* V *satisfont à l'identité* (γ) *en* x, y *et* z.

15. Revenons maintenant au n° 13. Pour pouvoir ramener au cas de $\alpha = 1$, en suivant la méthode employée aux n°s 7 et 12, il faudrait que dans l'expression

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)^{\alpha} f'_z},$$

le polynome $P(x, y, z)$, qui s'annule le long de la courbe double, fût tel que la courbe

$$P(a, y, z) = 0$$

eût, comme tangente au point-pince, la tangente au point de rebroussement de la courbe $f(a, y, z) = 0$. S'il n'en est pas ainsi, nous allons montrer qu'on peut faire une première transformation réalisant cette condition. Formons la combinaison

$$\frac{P(x, y, z)}{(x-a)^{\alpha} f'_z} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{U}{(x-a)^{\alpha-1} f'_z}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{V}{(x-a)^{\alpha-1} f'_z}\right],$$

qui peut s'écrire

$$\frac{P(x, y, z) + (\alpha - 1)V}{(x-a)^{\alpha} f'_z} - \frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right].$$

Prenons pour U un polynome tel que la surface $U = 0$ passe par la courbe double et par la courbe simple de rencontre de $f = 0$ et $f'_z = 0$; de même, prenons pour V un polynome satisfaisant aux mêmes conditions, en ajoutant, en plus, la condition que la surface

$$P(x, y, z) + (\alpha - 1)V = 0$$

soit tangente au point-pince à la tangente à $f(a, y, z) = 0$ dans le plan $x = a$, et cette dernière condition peut évidemment être réalisée. D'autre part la surface

$$U f'_y + V f'_x = 0$$

a pour ligne double la courbe double de f et passe, comme $U = 0$ et $V = 0$, par la ligne *simple* de rencontre de $f = 0$ et $f'_z = 0$; on



a donc

$$U f'_y + V f'_x = A f'_z + K f.$$

Enfin $\frac{U}{f'_z}$ et $\frac{V}{f'_z}$ restant finies en un point arbitraire de la courbe double, l'expression

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right)$$

sera de la forme

$$\frac{M(x, y, z)}{f'_z},$$

M étant un polynome s'annulant sur la courbe double. Donc, par la soustraction effectuée, l'intégrale

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z},$$

est remplacée par l'intégrale

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z},$$

où α a la même valeur mais où le polynome Q satisfait à la condition nécessaire pour notre réduction ultérieure, condition à laquelle ne satisfaisait pas P.

Nous concluons de là que, *si le plan $x = a$ passe par un point-pince, l'intégrale*

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)^\alpha f'_z}$$

peut, comme quand le plan ne passait pas par un point-pince, être ramenée au cas de $\alpha = 1$.

Une démonstration analogue s'applique, avec peu de modifications, au cas où le plan $x = a$ passe par un point triple de la courbe double, et nous pouvons, par conséquent, conclure que *toutes les intégrales considérées de seconde espèce se ramènent à la forme*

$$\iint \frac{P(x, y, z)}{(x-a) f'_z}\,dx\,dy.$$

16. Allons encore plus loin, et établissons que l'on peut faire disparaître le facteur $x - a$ du dénominateur. Nous partons de

l'intégrale supposée de seconde espèce

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{(x-a)f'_z},$$

[$P(x, y, z)$ s'annulant sur la courbe double].

Nous savons (n° 6) que, dans le voisinage d'un point de la section plane $x = a$, on obtiendra une intégrale restant finie dans le voisinage de ce point en retranchant de l'intégrale précédente une intégrale de la forme

$$\iint \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{B(x, y, z)}{x-a}\right] dx\,dy$$

[$B(x, y, z)$ étant une fonction rationnelle de x, y et z ne devenant pas identiquement infinie pour $x = a$]. Il résulte de là que l'on a

$$\frac{P(a, y, \zeta)}{f'_\zeta} = \frac{\partial}{\partial y}[B(a, y, \zeta)] \qquad [f(a, y, \zeta) = 0].$$

La courbe $f(a, y, \zeta) = 0$ ayant des points singuliers, nous ne pouvons pas conclure, comme au n° 8, que $B(a, y, \zeta)$ est un polynome en y et ζ, mais il résulte des théorèmes les plus simples sur les fonctions algébriques d'une variable, que l'on peut écrire

$$B(a, y, \zeta) = \frac{M(y, \zeta)}{f'_\zeta},$$

$M(y, \zeta)$ étant un polynome en y et ζ qui s'annule pour les points de la courbe $f(a, y, \zeta) = 0$, qui correspondent à $f'_\zeta = 0$ (si la courbe a un point triple, la courbe $M(y, \zeta) = 0$ aura ce point comme point double). Ceci posé, nous allons chercher à former un polynome $Q(x, y, z)$ tel que la surface

$$Q(x, y, z) = 0$$

passe par les deux courbes de rencontre des surfaces

$$f = 0, \qquad f'_z = 0$$

(dont l'une est la courbe double que nous appellerons Γ, tandis que l'autre C représentera le lieu des points simples de la surface où le plan tangent est parallèle à l'axe des z), et que l'on ait

$$Q(a, y, z) = M(y, z) + \theta(y, z) f(a, y, z),$$



$\theta(y, z)$ étant un polynome arbitraire, et où, comme nous l'avons dit, le polynome $M(y, z)$ s'annule aux points doubles de la courbe

$$f(a, y, z) = 0$$

et aux points simples de cette courbe où la tangente est parallèle à Oz. [Dans le cas où le plan $x = a$ passerait par un point commun à C et Γ, la tangente à la courbe $M(y, z) = 0$ en ce point serait parallèle à l'axe des z.] La question revient à trouver une surface

$$Q(x, y, z) = 0$$

passant par C et Γ, et coupant *à distance finie* le plan $x = a$ seulement suivant la courbe $M(y, z) + \theta(y, z) f(a, y, z) = 0$.

La possibilité de cette recherche résulte du théorème général de M. Castelnuovo sur les systèmes linéaires de surfaces établi dans un Chapitre précédent : *Un système linéaire complet de surfaces défini par des lignes-bases et par des points-bases découpe sur un plan arbitraire un système* complet (*régulier*) *de courbes, pourvu que le degré des surfaces dépasse une certaine limite.* Nous appliquerons ce théorème au système linéaire complet Σ des surfaces de degré λ passant simplement par C et Γ, et aux sections par le plan $x = a$. Le système linéaire Σ découpe sur le plan $x = a$ le système complet σ des courbes de ce plan passant par les points où il rencontre C et Γ (si $x = a$ passe par un point P commun à C et à Γ, les courbes du système plan ont une tangente déterminée, intersection du plan tangent à la surface en P avec le plan $x = a$), pourvu que le degré λ des surfaces soit assez grand. Parmi les courbes du système σ se trouve, si λ est pris assez grand, la courbe composée formée de la courbe

$$(\alpha) \qquad M(y, z) + \theta(y, z) f(a, y, z) = 0,$$

et de la droite à l'infini répétée un nombre convenable de fois. Il y aura donc, d'après le théorème de M. Castelnuovo, une surface

$$Q(x, y, z) = 0,$$

coupant le plan $x = a$ suivant la courbe (α) et la droite à l'infini avec un certain degré de multiplicité; le polynome Q remplira les conditions requises.

On voit alors que l'intégrale à soustraire peut être prise égale à

$$\iint \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{Q(x, y, z)}{(x-a)f'_z}\right] dx\, dy.$$

D'ailleurs, l'expression

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{Q(x, y, z)}{f'_z}\right]$$

sera de la forme

$$\frac{R(x, y, z)}{f'_z} \qquad \text{(R étant un polynome)}$$

puisque le polynome Qf'_y sera nécessairement (n° 14) de la forme

$$Af'_z + Kf;$$

notre intégrale, par la soustraction de l'intégrale ci-dessus, est donc ramenée à

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}.$$

Nous arrivons donc finalement au théorème déjà obtenu pour les surfaces sans singularités :

Étant donnée une surface

$$f(x, y, z) = 0$$

que l'on peut supposer à singularités ordinaires (une ligne double avec des points triples), toutes les intégrales doubles de seconde espèce relatives à cette surface se ramènent par la soustraction d'une intégrale de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy$$

(U et V rationnelles en x, y et z) *au type*

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

$P(x, y, z)$ *étant un polynome qui s'annule pour la courbe double.*

V. — Théorème fondamental sur le nombre limité des intégrales de seconde espèce.

17. Il s'agit maintenant de montrer que les intégrales de *seconde espèce*

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z} \tag{I}$$

se ramènent à un nombre *limité* d'entre elles. Nous ferons cette réduction en retranchant de l'intégrale précédente une intégrale

$$\iint \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right] dx\,dy,$$

où U et V sont des polynomes.

18. Partons de l'intégrale (I), où le polynome

$$P(x, y, z)$$

est de degré p, et désignons par $P_1(x, y, z)$ l'ensemble des termes homogènes et de degré p dans P. Posons

$$\left\{\begin{aligned} U &= yP_1 + H, \\ V &= xP_1 + K. \end{aligned}\right. \tag{α}$$

H et K étant des polynomes de degré p en x, y et z. *On peut choisir, si p est assez grand, les polynomes* H *et* K *de degré p, de telle manière que l'on ait l'identité*

$$Uf'_y + Vf'_x = Af'_z + Bf \qquad \text{(A et B étant des polynomes)},$$

identité qui peut s'écrire

$$P_1(yf'_y + xf'_x) + Hf'_y + Kf'_x = Af'_z + Bf.$$

Pour légitimer cette assertion, nous n'avons qu'à nous appuyer sur la proposition de M. Castelnuovo dont nous avons déjà fait usage (n° 16). Considérons la surface Φ représentée par l'équation

$$Uf'_y + Vf'_x = 0. \tag{Φ}$$

Elle passe par les deux courbes définies par les équations

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0.$$

L'une de ces courbes Γ est la ligne double de f; désignons l'autre par C. Les axes ayant été pris arbitrairement, on peut supposer que C et Γ sont des lignes simples de rencontre de $f'_x = 0$, $f'_y = 0$. Ensuite Φ coupe le plan de l'infini, suivant la ligne

$$(\gamma) \qquad t = 0, \qquad P_1(y\varphi'_y + x\varphi'_x) = 0,$$

en introduisant la quatrième coordonnée homogène t, et en désignant par φ l'ensemble des termes homogènes de plus haut degré m dans f. Réciproquement, toute surface de degré p passant par les courbes C et Γ et contenant la ligne plane (γ) a le premier membre de son équation de la forme

$$Uf'_y + Vf'_x,$$

où U et V sont des polynomes de la forme (α).

D'autre part, la surface Φ est aussi représentée par l'équation

$$Af'_z + Bf = 0.$$

Elle passe donc par la courbe simple D de la surface f, définie par les équations

$$f = 0, \qquad f'_z = 0.$$

De plus, elle passe, comme nous le savions déjà, par la ligne double, mais nous voyons maintenant que Φ est tangent à la surface

$$f'_z = 0,$$

le long de la ligne double Γ; réciproquement, toute surface passant par D et par Γ, et étant tangente à $f'_z = 0$ le long de Γ, a le premier membre de son équation de la forme

$$Af'_z + Bf.$$

Considérons alors le système linéaire Σ des surfaces de degré $m+p$ défini par les lignes-bases simples C, D et Γ, avec la condition que le long de Γ ces surfaces soient tangentes à $f'_z = 0$. Si p est assez grand, et par suite $m+p$, ce système linéaire découpera sur le plan de l'infini

$$t = 0$$

le système linéaire *complet* de courbes de degré $m+p$, caractérisé par les points-bases simples qui sont les intersections du plan de l'infini avec les courbes C, D et Γ, avec la condition supplémentaire qu'aux points d'intersection du plan de l'infini avec la courbe Γ, la courbe soit tangente à la surface $f'_z = 0$. Or la courbe (γ), considérée plus haut, définie par les équations

$$t = 0, \qquad P_1(y\varphi'_y + x\varphi'_x) = 0,$$

satisfait bien à ces diverses conditions, car la courbe

$$t = 0, \qquad y\varphi'_y + x\varphi'_x = 0$$

qu'elle contient partiellement, passe par les points à l'infini de C, D et Γ. Les points à l'infini de Γ satisfaisant aux équations

$$t = 0, \qquad \varphi'_z = 0, \qquad \varphi = 0,$$

la courbe $y\varphi'_y + x\varphi'_x = 0$ dont l'équation peut s'écrire

$$-z\varphi'_z + m\varphi = 0$$

est bien tangente à $\varphi'_z = 0$ aux points doubles de φ.

Donc, si p est assez grand, nous pourrons certainement trouver une surface du système linéaire Σ, donnée soit par l'équation

$$Uf'_y + Vf'_x = 0,$$

soit par l'équation qui lui est identique

$$Af'_z + Bf = 0,$$

où U et V ont la forme (α).

19. Nous allons facilement achever la démonstration. Après avoir déterminé U et V comme il vient d'être dit, formons la différence

$$\frac{P(x, y, z)}{f'_z} - \frac{1}{p-m+3}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right];$$

nous allons voir qu'elle est de la forme

$$\frac{Q(x, y, z)}{f'_z},$$

où Q *est seulement de degré* $p-1$, tandis que P était de degré p.

On a l'identité en x, y, z

$$Uf'_y + Vf'_x = Af'_z + Bf,$$

A et B étant des polynomes respectivement de degré $p+1$ et p. D'après le calcul du n° 14, on a sur la surface $f = 0$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right) = \frac{\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} - B}{f'_z}.$$

Or, soient dans U, V, A, B les termes homogènes de plus haut degré en x, y, z représentés respectivement par u, v, a, b; on aura d'abord

$$u = y P_1, \qquad v = x P_1,$$

donc

$$P_1(y \varphi'_y + x \varphi'_x) = a \varphi'_z + b \varphi,$$

d'où l'on déduit

$$P_1(-z \varphi'_z + m \varphi) = a \varphi'_z + b \varphi,$$

on en conclut

$$\left.\begin{aligned} a &= -P_1 z + \lambda\varphi \\ b &= m P_1 - \lambda\varphi'_z \end{aligned}\right\} \quad (\lambda \text{ polyn. homog. en } x, y, z \text{ de degré } p+1-m).$$

On aura donc, comme on le vérifie immédiatement,

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z} - b = (p - m + 3) P_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \varphi.$$

On pourra par suite, *sur la surface f*, écrire

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} - B = (p - m + 3) P_1(x, y, z) + Q(x, y, z),$$

$Q(x, y, z)$ étant un polynome de degré $p-1$ au plus. Nous concluons donc de là qu'on peut passer de l'intégrale

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

où P est un polynome de degré p, à une intégrale de même forme où P sera seulement de degré $p-1$, pourvu que p dépasse une certaine limite.

20. Nous pouvons enfin déduire de toutes les transformations précédentes le théorème fondamental relatif au nombre limité des intégrales distinctes de seconde espèce. Convenons de dire que *des intégrales de seconde espèce sont distinctes,* si aucune combinaison linéaire de ces intégrales n'est de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

U et V étant rationnelles en x, y, z.

Le théorème fondamental sur les intégrales doubles de seconde espèce est alors le suivant :

Il n'y a pour une surface algébrique qu'un nombre limité d'intégrales doubles distinctes de seconde espèce.

Ou encore :

Il existe pour une surface algébrique un certain nombre ρ *d'intégrales doubles distinctes de seconde espèce*

$$I_1, \quad I_2, \quad \ldots, \quad I_\rho,$$

telles que toute autre intégrale double de seconde espèce est de la forme

$$\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \ldots + \alpha_\rho I_\rho + \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

les α *étant des constantes, et* U *et* V *des fonctions rationnelles de* x, y, z.

21. La démonstration précédente s'applique à tous les cas. Pour établir que les intégrales

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

se réduisent à un nombre fini d'entre elles, on pourrait se borner au cas où la surface est la plus générale de son degré.

En prenant pour $f(x, y, z)$ *un polynome arbitraire* de degré m, on peut trouver facilement une limite du degré p. Reprenons l'identité fondamentale

$$U f'_y + V f'_x = A f'_z + B f,$$

en supposant que U et V sont de degré $p+1$. On a alors

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{f'_z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{f'_z}\right)=\frac{Q(x,y,z)}{f'_z},$$

Q étant un polynome de degré p. Nous avons vu que dans $Q(x, y, z)$ l'ensemble des termes homogènes de degré p sera égal à un polynome homogène donné $P_1(x, y, z)$, si l'on a

$$\left.\begin{array}{l} U = yP_1 + H \\ V = xP_1 + K \end{array}\right\} \quad \text{(H et K polynomes de degré } p\text{)}.$$

Formons alors l'identité

$$(\Phi) \qquad P_1(yf'_y + xf'_x) + Hf'_y + Kf'_x = Af'_z + Bf.$$

Dans $Hf'_y + Kf'_x$, où H et K sont des polynomes arbitraires de degré p, le nombres des arbitraires est égal à

$$2\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - \frac{(p-m+2)(p-m+3)(p-m+4)}{6}.$$

D'autre part, pour avoir une identité de la forme (Φ), il faut et il suffit que la surface obtenue en égalant à zéro le premier membre de cette identité, que nous appellerons la surface Φ, passe par la courbe gauche

$$(\gamma) \qquad f = 0, \qquad f'_z = 0.$$

Or, on sait que le nombre des conditions exprimant qu'une surface de degré μ passe par une courbe gauche sans point singulier de degré d et de genre π est égal à

$$\mu d - \pi + 1,$$

si μ est assez grand; dans le cas où la courbe est l'intersection complète de deux surfaces de degrés α et β, on doit avoir

$$\mu \geqq \alpha + \beta - 3.$$

Dans la question actuelle

$$\mu = p + m, \qquad \pi = \frac{m(m-1)(2m-5)}{2} + 1.$$

De plus, la surface Φ a, quels que soient les arbitraires qui y figurent, un nombre de points communs avec la courbe (γ) égal à

$m(m-1)$, et qui sont les $m(m-1)$ points à l'infini de (γ); le nombre des conditions est donc à diminuer de $m(m-1)$. Le nombre des paramètres sera au moins égal au nombre des conditions qui expriment que la surface Φ passe par la courbe (γ), si l'on a

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3}-\frac{(p-m+2)(p-m+3)(p-m+4)}{6}$$
$$>(p+m-1)m(m-1)-\frac{m(m-1)(2m-5)}{2}.$$

Si p_0 désigne le plus grand nombre entier positif *pour lequel cette inégalité n'est pas vérifiée,* on pourra ramener toute intégrale

$$\iint\frac{P(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

à une intégrale de même forme, où le degré de P sera au plus p_0. On ne peut pas trouver pour p_0 une expression simple, mais on vérifie facilement que

$$p_0 \leqq 2m-4,$$

et l'on est par suite assuré *de pouvoir réduire à* $2m-4$ *le degré du polynome* qui figure au numérateur de l'intégrale double.

VI. — Recherche des conditions pour qu'une intégrale double soit de seconde espèce.

22. Nous venons de montrer que toutes les intégrales de seconde espèce se ramènent par une soustraction convenable à la forme

$$\iint\frac{P(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

(le polynome P s'annulant sur la courbe double), où le degré p du polynome P est limité. Mais toutes les intégrales doubles de cette forme ne sont pas de *seconde espèce*. Il faut maintenant exprimer que cette intégrale est de seconde espèce.

Nous n'avons rien à exprimer pour ce qui regarde les points à distance finie de la surface

$$f(x,y,z)=0.$$

Nous avons seulement à examiner les points à l'infini, en supposant d'ailleurs, comme il est permis, qu'avant toute réduction on ait fait une transformation homographique.

Posons

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{Y}{X}, \qquad z = \frac{Z}{X};$$

et soit alors $F(X, Y, Z) = 0$ l'équation de la surface transformée. L'intégrale prendra la forme

$$\iint \frac{1}{X^{p-(m-4)}} \frac{H(X, Y, Z)}{F'_Z} dX\, dY,$$

$H(X, Y, Z)$ désignant un polynome qui s'annule pour la courbe double de F. Si p est au plus égal à $m - 4$, l'intégrale est de première espèce. Soit donc

$$p > m - 4.$$

Par la soustraction d'une intégrale convenable de la forme (n[os] 7 et 12)

$$\iint \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{A(X, Y, Z)}{X^{p-(m-3)}} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{B(X, Y, Z)}{X^{p-(m-4)}} \right] \right\} dX\, dY,$$

on obtient une intégrale

$$\iint \frac{1}{X} \frac{K(X, Y, Z)\, dX\, dY}{F'_Z},$$

$K(X, Y, Z)$ étant un polynome s'annulant pour la courbe double. D'après le n° 16, pour que cette intégrale ait sur la ligne $X = 0$ le caractère d'une intégrale de seconde espèce, il faut et il suffit que l'expression

$$\frac{K(0, Y, Z)}{F'_Z(0, Y, Z)} \qquad [F(0, Y, Z) = 0],$$

soit la dérivée d'une fonction rationnelle de Y et Z. On pourra reconnaître s'il en est effectivement ainsi, ce qui entraînera en général

$$2\pi + m - 1$$

conditions, en désignant par π le genre d'une section plane quelconque de la surface et par suite de la courbe $F(0, Y, Z) = 0$. Les



conditions reviennent en effet à écrire que l'intégrale abélienne

$$\int \frac{K(o, Y, Z)\, dY}{F'_Z(o, Y, Z)} \qquad [F(o, Y, Z) = o],$$

est algébrique ; les 2π périodes cycliques doivent être donc nulles, ainsi que les m résidus relatifs aux points à l'infini, qui donnent seulement $m - 1$ conditions. On sait d'ailleurs que toutes ces conditions s'expriment sous forme algébrique.

23. Toutes ces conditions étant remplies, nous sommes assuré que pour les points à l'infini de la surface

$$f(x, y, z) = o$$

qui correspondent à

$$X = o, \qquad Y = \text{une valeur finie},$$

les conditions pour que l'intégrale proposée soit de seconde espèce se trouvent vérifiées. Si l'on avait posé

$$x = \frac{X_1}{Y_1}, \qquad y = \frac{1}{Y_1}, \qquad z = \frac{Z_1}{Y_1},$$

on aurait eu l'intégrale

$$\iint \frac{1}{Y_1^{p-(m-4)}} \frac{H_1(X_1, Y_1, Z_1)}{F'_{1, Z_1}} dX_1\, dY_1 \qquad [F_1(X_1, Y_1, Z_1) = o].$$

Pour les points de la courbe $Y_1 = o$, elle devrait en général avoir le caractère d'une intégrale de seconde espèce, puisque cette courbe correspond à $X = o$. Donc pour tous les points à l'infini de la surface F_1 qui correspondent à $Y_1 = o$ et à une valeur finie de X_1 se trouvent vérifiées les conditions pour que l'intégrale soit de seconde espèce. Mais on a

$$X_1 = \frac{1}{Y}, \qquad Y_1 = \frac{X}{Y},$$

donc aux points de F exclus plus haut pour lesquels

$$X = o, \qquad Y = \infty,$$

correspondent sur F_1

$$X_1 = o, \qquad Y_1 = o$$

et par suite pour les points à l'infini de la surface f pour lesquels

$$X = 0, \qquad Y = \infty$$

les conditions relatives à la nature de l'intégrale double sont bien vérifiées.

Il reste enfin à examiner les points à l'infini de la surface f pour lesquels

$$x = \text{une valeur finie}, \qquad y = \infty;$$

comme ils correspondent nécessairement sur F_1 à des points pour lesquels

$$Y_1 = 0, \qquad X_1 = 0,$$

la conclusion est immédiate, et les conditions voulues sont vérifiées.

Ainsi donc *nous savons exprimer que l'intégrale double*

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

(le polynome P s'annulant sur la courbe double) *est une intégrale double de seconde espèce.*

Ceci revient à exprimer qu'une certaine intégrale abélienne est algébrique; *le nombre des conditions est en général égal à*

$$2\pi + m - 1,$$

π *désignant le genre d'une section plane quelconque de la surface.*

VII. — Caractère invariant de l'intégrale de seconde espèce.

24. Nous avons maintenant à montrer qu'une intégrale double de seconde espèce reste une intégrale de seconde espèce quand on effectue sur la surface une transformation birationnelle. Nous avons déjà vu (n° 2) que la *forme* des expressions

$$(1) \qquad \int\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy$$

est invariante relativement à toute transformation birationnelle, mais cela ne suffit pas pour établir l'invariance des intégrales de seconde espèce. La difficulté provient des points fondamentaux



que peuvent posséder les transformations birationnelles. Soit, sur la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

un point A, que l'on peut évidemment supposer simple, qui soit un point fondamental de la transformation, c'est-à-dire qu'au point A de f correspond sur la surface transformée

$$F(X, Y, Z) = 0$$

une certaine ligne. Envisageons une intégrale I de seconde espèce de la surface F et recherchons si sa transformée i relative à la surface f possède au point A le caractère d'une intégrale double de seconde espèce. L'intégrale i pourra devenir infinie le long de certaines lignes

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \ldots, \quad \Gamma_k$$

passant par le point A; il résulte de ce que i est la transformée d'une intégrale de seconde espèce de la surface F, que l'on peut retrancher de l'intégrale i une intégrale double de la forme

$$(h = 1, 2, \ldots, k) \qquad \iint \left(\frac{\partial U_h}{\partial x} + \frac{\partial V_h}{\partial y}\right) dx\, dy \qquad \left\{ \begin{array}{l} (U_h \text{ et } V_h \text{ rationnelles en } x, y \text{ et } z) \end{array} \right.$$

telle que la différence de ces deux intégrales reste finie dans le voisinage de A sur la courbe Γ_h (en dehors de A). Nous allons voir que cela suffit pour affirmer que l'intégrale i présente en A le caractère d'une intégrale de seconde espèce.

Les axes des coordonnées étant supposés arbitrairement situés par rapport à la surface, nous écrirons i sous la forme

$$(i) \qquad \iint \frac{A(x, y, z)}{[R_1(x, y)]^{\alpha_1} \ldots [R_k(x, y)]^{\alpha_k} f'_z}\, dx\, dy,$$

les polynomes R de x et y étant irréductibles et premiers entre eux, et s'annulant en A, tandis que $A(x, y, z)$ est une fraction rationnelle de x, y, z qui reste finie en ce point. On peut, par hypothèse, retrancher de i une intégrale

$$\iint \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

telle que la différence des deux intégrales reste finie dans le voisinage de A sur la ligne Γ_1 (en dehors de A); nous supposons que

pour Γ_1 on ait $R_1(x, y) = 0$. En décomposant, comme nous l'avons fait à plusieurs reprises, U_1 et V_1 en éléments simples, nous ferons ainsi disparaître R_1 du dénominateur, mais en introduisant à la place une certaine puissance de $x - a$ (on désigne par a l'abscisse de A). En continuant ainsi de proche en proche, nous retranchons de i une intégrale de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

de telle sorte que la différence soit de la forme

$$(j) \qquad \iint \frac{B(x, y, z)}{(x-a)^{\alpha} f'_z}\, dx\, dy,$$

la fraction rationnelle B étant finie en A. Cette dernière intégrale j est évidemment telle que l'on peut en retrancher une intégrale de la forme tant de fois considérée, de façon que la différence reste finie dans le voisinage de A (en dehors de A) sur la ligne $x = a$.

En faisant les réductions les plus élémentaires, nous sommes ramené au cas de $\alpha = 1$ et nous avons, par suite, en ayant fait seulement des soustractions du type voulu, l'intégrale

$$(2) \qquad \iint \frac{C(x, y, z)}{(x-a) f'_z}\, dx\, dy,$$

$C(x, y, z)$ étant finie et déterminée en A. Nous pouvons d'ailleurs supposer que la courbe pour laquelle on a

$$\frac{1}{C(x, y, z)} = 0$$

ne rencontre pas le plan $x = a$ en un point dont la coordonnée y soit égale à b (en désignant par b la seconde coordonnée de A); dans le cas contraire, en effet, il suffirait de faire tourner les axes Oy et Oz dans le plan des zy sans changer l'axe Ox.

Ceci posé, d'après nos hypothèses, on peut retrancher de l'intégrale (2) une intégrale de la forme

$$\iint \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{R(x, y, z)}{x - a}\right] dx\, dy$$

[où $R(x, y, z)$ est une fonction rationnelle], et telle que la différence des deux intégrales reste finie dans le voisinage de A (en



dehors de A) sur la ligne $x = a$. Ceci entraîne l'identité

$$\frac{C(a, y, \zeta)}{f'_\zeta(a, y, \zeta)} = \frac{\partial}{\partial y} R(a, y, \zeta) \qquad [\text{sur la courbe } f(a, y, \zeta) = 0].$$

D'après ce que nous avons dit, la fonction rationnelle $C(a, y, \zeta)$ reste finie pour les points de la courbe $f(a, y, \zeta) = 0$, qui correspondent à $y = b$. Donc, on peut mettre l'expression

$$R(a, y, \zeta)$$

sous la forme

$$\frac{M(y, \zeta)}{R(y)},$$

M étant un polynome en y et ζ, et $R(y)$ ne s'annulant pas pour $y = b$. Par suite, si l'on retranche de l'intégrale (2) l'intégrale

$$\iint \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{M(y, z)}{(x-a)R(y)}\right] dx\, dy,$$

on aura une différence qui sera de la forme

$$\iint S(x, y, z)\, dx\, dy,$$

la fraction rationnelle S étant finie et déterminée au point A. Ceci montre que l'intégrale (2) et, *par suite, l'intégrale initiale i présentent en* A *ce que nous avons appelé le caractère d'une intégrale double de seconde espèce.*

Ainsi se trouve établi le *caractère invariant de l'intégrale double de seconde espèce;* le nombre désigné par ρ au n° 20 est donc un *nombre invariant* pour toute transformation birationnelle.

VIII. — Quelques exemples.

25. Considérons d'abord les intégrales de fonctions rationnelles

$$(1) \qquad \iint S(x, y)\, dx\, dy,$$

S étant une fonction rationnelle de deux variables indépendantes x et y. Il résulte immédiatement du théorème général du n° 11, que de telles intégrales, quand elles sont de seconde espèce,

peuvent par la soustraction d'une expression

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx\, dy, \tag{2}$$

être ramenées à la forme

$$\iint P(x, y)\, dx\, dy, \tag{3}$$

P étant un polynome. En effet, on peut regarder (1) comme une intégrale relative à la surface

$$z = ax + by + c.$$

D'autre part, il est manifeste que l'intégrale (3) peut s'écrire

$$\iint \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy,$$

Q étant un polynome en x et y, car on peut toujours poser $P = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Donc, *toutes les intégrales doubles de seconde espèce de fonctions rationnelles de x et y sont de la forme* (2). Le nombre désigné plus haut par ρ est ici égal à zéro.

Il ne sera pas inutile de reprendre directement la démonstration du résultat précédent, sans s'appuyer sur aucun théorème général. Soit

$$S(x, y) = \frac{P(x, y)}{[R_1(x, y)]^{\alpha_1} \ldots [R_m(x, y)]^{\alpha_m}},$$

les R étant des polynomes irréductibles en x et y, que nous pouvons supposer contenir à la fois x et y, et premiers entre eux. Puisque l'intégrale (1) est de seconde espèce par hypothèse, on doit pouvoir retrancher de (1) une intégrale de la forme (2), telle que la différence reste finie dans le voisinage d'un point appartenant à la courbe

$$R_1(x, y) = 0.$$

Si nous décomposons U et V en éléments simples par rapport à y, relativement à chacun des polynomes R, nous avons

$$U = \sum \frac{A_i(x, y)}{[R_i(x, y)]^{k_i}}, \qquad V = \sum \frac{B_i(x, y)}{[R_i(x, y)]^{k_i}},$$

A_i et B_i étant des polynomes en y à coefficients rationnels en x.



La différence

$$S(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{A_1(x, y)}{[R_1(x, y)]^{k_1}}\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{B_1(x, y)}{[R_1(x, y)]^{k_1}}\right\}$$

ne doit pas être identiquement infinie dans le voisinage d'un point arbitraire satisfaisant à la relation

$$R_1(x, y) = 0.$$

Par cette soustraction, nous faisons donc disparaître R_1 du dénominateur, en introduisant cependant à la place un polynome en x seul. En opérant maintenant relativement à R_2, et ainsi de suite, nous voyons que, par la soustraction d'une intégrale (2), nous ramenons l'intégrale de seconde espèce (1) à l'intégrale

$$\iint \frac{P(x, y)}{V(x)}\, dx\, dy,$$

P étant un polynome en x et y, et $V(x)$ un polynome en x.

Cette dernière intégrale est la somme d'intégrales

$$\iint R(x)\, y^m\, dx\, dy$$

[où $R(x)$ est une fraction rationnelle de x, et m un entier positif] que l'on peut écrire

$$\frac{1}{m+1}\iint \frac{\partial}{\partial y}[R(x)\, y^{m+1}]\, dx\, dy;$$

elle est donc de la forme (2), et nous retrouvons bien le résultat annoncé.

26. Prenons encore, comme exemple, une surface qui correspond birationnellement à l'ensemble de deux courbes φ et ψ, c'est-à-dire une surface pour laquelle on a

$$\begin{aligned} x &= R_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta'), \\ y &= R_2(\alpha, \beta, \alpha', \beta'), \\ z &= R_3(\alpha, \beta, \alpha', \beta'), \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} \varphi(\alpha, \beta) = 0 \\ \psi(\alpha', \beta') = 0 \end{bmatrix},$$

les R étant rationnelles en α, β, α' et β', et cela de telle manière qu'à un point *arbitraire* (x, y, z) de la surface corresponde un

seul couple (α, β) et (α', β'); nous désignerons par $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface.

Soit

$$\int R(\alpha, \beta)\, d\alpha \tag{4}$$

une intégrale abélienne de seconde espèce, non rationnelle, de la courbe

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

que nous supposons de genre supérieur à zéro, et soit pareillement

$$\int S(\alpha', \beta')\, d\alpha' \tag{5}$$

une intégrale de seconde espèce, non rationnelle, relative à la courbe de genre supérieur à zéro,

$$\psi(\alpha', \beta') = 0.$$

J'envisage l'intégrale double

$$\iint R(\alpha, \beta)\, S(\alpha', \beta')\, d\alpha\, d\alpha',$$

qui est manifestement de la forme

$$\iint T(x, y, z)\, dx\, dy, \tag{6}$$

T étant rationnelle en x, y et z. Nous allons voir que cette intégrale est une intégrale de seconde espèce de la surface f. Les lignes, le long desquelles l'intégrale (6) devient infinie, correspondent aux pôles de l'intégrale (5). Si A est un pôle de (4) sur la courbe φ (on peut le supposer à distance finie), on a, dans le voisinage de ce point,

$$R(\alpha, \beta) = \frac{dU}{d\alpha} + \rho(\alpha, \beta),$$

ρ et U étant rationnelles en α et β, et ρ restant finie en A. L'intégrale peut donc s'écrire

$$\iint \left(\frac{dU}{d\alpha} + \rho\right) S(\alpha', \beta')\, d\alpha\, d\alpha',$$

c'est-à-dire

$$\iint \frac{\partial}{\partial \alpha}[\mathrm{U}(\alpha, \beta)\,\mathrm{S}(\alpha', \beta')]\,d\alpha\,d\alpha' + \iint \rho \mathrm{S}\,d\alpha\,d\alpha';$$

le premier terme seul devient infini pour un point de la surface f pris arbitrairement sur la ligne Γ qui correspond au point A de la courbe φ. Or, ce premier terme, d'après les généralités du n° **2**, est nécessairement de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

U_1 et V_1 étant rationnelles en x, y et z. Donc, en un point arbitraire de la ligne Γ, l'intégrale (6) présente le caractère d'une intégrale de seconde espèce. Pour les pôles de ψ on raisonnerait de la même manière, et aussi pour les points correspondants à la fois aux pôles de φ et aux pôles de ψ, et nous arrivons bien à la conclusion que *l'intégrale* (6) *est une intégrale double de seconde espèce*.

Une question intéressante se pose immédiatement. Peut-on affirmer que l'intégrale (6) n'est pas réductible à une intégrale

$$\iint \left(\frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right) dx\,dy?$$

Il en est bien ainsi, du moins en général; c'est là un point assez délicat à établir, qui appellera notre attention sur certaines circonstances intéressantes relatives à la périodicité des intégrales doubles.

27. Nous commencerons par l'examen d'un cas particulier remarquable, qui se rapporte à la théorie des intégrales hyperelliptiques. On connaît, dans la théorie de ces intégrales d'après Weierstrass, l'importance de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sqrt{\mathrm{P}(x)}}{(y-x)\sqrt{\mathrm{P}(y)}}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sqrt{\mathrm{P}(y)}}{(x-y)\sqrt{\mathrm{P}(x)}}\right] = \frac{\mathrm{U}(x, y)}{\sqrt{\mathrm{P}(x)}\sqrt{\mathrm{P}(y)}},$$

où $\mathrm{P}(x)$ désigne un polynome arbitraire ayant des racines distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et où $\mathrm{U}(x, y)$ est un *polynome* en x et y défini par cette identité même.

Si nous envisageons la surface

$$z^2 = P(x)P(y),$$

on aura

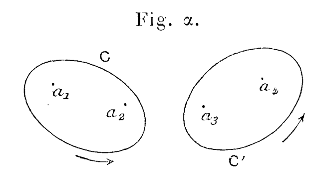
(1) $$\frac{U(x,y)}{z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{P(x)}{(y-x)z}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{P(y)}{(x-y)z}\right].$$

Nous allons considérer l'intégrale double

(I) $$\int\int \frac{U(x,y)}{z}\,dx\,dy,$$

prise le long d'un cycle à deux dimensions formé par une courbe fermée C du plan de la variable x qui comprenne à son intérieur deux des points a, et par une courbe fermée C' analogue dans le plan de la variable y. Si les deux courbes C et C', tracées sur le même plan, offrent la disposition de la *fig.* α, c'est-à-dire si les

Fig. α.



contours C et C' ne se coupent pas (ou peuvent être ramenés à des contours ne se coupant pas sans traverser les points a), on aura de suite, d'après l'identité (1), la relation

$$\int_C \int_{C'} \frac{U(x,y)}{z}\,dx\,dy = 0,$$

puisque, tous les éléments restant finis dans les deux intégrales

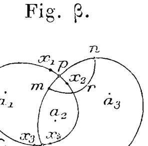
(2) $$\int\int \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{P(x)}{(y-x)z}\right] dx\,dy, \qquad \int\int \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{P(y)}{(x-y)z}\right] dx\,dy,$$

on n'a qu'à faire la première intégration dans chacune de ces intégrales et l'on obtient ainsi *zéro*.

Le résultat précédent ne subsiste pas si les deux contours ont la disposition de la *fig.* β. Les contours C et C' ont *deux* points communs p et q, et le maniement des intégrales (2) demande quelques précautions à cause des *deux* éléments qui y deviennent

infinis. Prenons sur C deux points x_1 et x_2 de part et d'autre de p, et deux points x_3 et x_4 de part et d'autre de q.

Fig. β.



Nous allons calculer la valeur de l'intégrale

$$\int\int \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sqrt{\mathrm{P}(x)}}{(y-x)\sqrt{\mathrm{P}(y)}}\right] dx\, dy,$$

l'intégration par rapport à y étant faite le long de C', et l'intégration par rapport à x étant faite dans le sens de la flèche le long de l'arc $x_1 x_3$ et le long de l'arc $x_4 x_2$. Le radical $\sqrt{\mathrm{P}(x)}$ a une valeur bien déterminée le long de C, et le radical $\sqrt{\mathrm{P}(y)}$ une valeur bien déterminée le long de C'; nous pouvons supposer qu'ils sont égaux en p, ils auront alors des valeurs de signe contraire en q. Ceci posé, l'intégrale est manifestement égale à

$$-\int_{\mathrm{C}'}\left[\frac{\sqrt{\mathrm{P}(x_1)}}{(y-x_1)\sqrt{\mathrm{P}(y)}} - \frac{\sqrt{\mathrm{P}(x_2)}}{(y-x_2)\sqrt{\mathrm{P}(y)}}\right] dy$$
$$+\int_{\mathrm{C}'}\left[\frac{\sqrt{\mathrm{P}(x_3)}}{(y-x_3)\sqrt{\mathrm{P}(y)}} - \frac{\sqrt{\mathrm{P}(x_4)}}{(y-x_4)\sqrt{\mathrm{P}(y)}}\right] dy.$$

Pour calculer l'intégrale qui forme la première ligne, traçons un arc mrn. Une intégrale prise le long de C' est égale à la somme d'une intégrale prise le long du contour $mqnrm$ et d'une intégrale relative au contour $mrnpm$. Or, pour l'intégrale de la première ligne, la première de ces deux intégrales est très petite si x_1 est très voisin de x_2; la seconde se réduit à

$$\int \frac{\sqrt{\mathrm{P}(x_2)}}{(y-x_2)\sqrt{\mathrm{P}(y)}}\, dy,$$

prise le long du contour $mrnpm$: elle a donc pour valeur $2\pi i$. L'intégrale de la seconde ligne se calculera de même; sa valeur est

encore $2\pi i$, en se rappelant qu'en q, les radicaux $\sqrt{P(x)}$ et $\sqrt{P(y)}$ sont de signes contraires.

Si l'on calcule maintenant l'intégrale

$$\iint \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{P(y)}{(x-y)z}\right] dx\, dy$$

dans les mêmes conditions, on trouve évidemment zéro.

Donc l'intégrale (I) prise le long de C′ et des arcs $x_1 x_3$ et $x_4 x_2$ de C diffère très peu de $4\pi i$.

On a, par suite [1], pour la *fig.* β,

$$\int_C \int_{C'} \frac{U(x,y)}{z}\, dx\, dy = 4\pi i.$$

28. Revenons maintenant à nos intégrales

$$\iint R(\alpha, \beta)\, S(\alpha', \beta')\, d\alpha\, d\alpha' \tag{3}$$

et supposons, pour plus de simplicité, que les courbes φ et ψ soient des courbes arbitraires de leur degré. On peut supposer que les coefficients de R et les coefficients de S dépendent respectivement d'une manière algébrique des coefficients de φ et ψ; nous supposerons de plus que l'intégrale

$$\int R(\alpha, \beta)\, d\alpha,$$

prise le long d'un cycle C de φ, *n'est pas une fonction algébrique* des coefficients du polynome φ, et pareillement l'intégrale

$$\int S(\alpha', \beta')\, d\alpha',$$

prise le long d'un cycle C′ de ψ n'est pas une fonction algébrique

---

[1] Ce résultat est bien d'accord avec la relation capitale obtenue par Weierstrass d'une tout autre manière, et que l'illustre auteur formule de la manière suivante :

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} \frac{F(x,y)\, dx\, dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}} = \frac{\pi}{2i}.$$

Voir *Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale* (Tome I des *Œuvres de Weierstrass,* p. 117). Le polynome $R(x)$ est désigné dans notre texte par $P(x)$ et $F = \frac{U}{2}$.



des coefficients du polynome ψ. Nous disons qu'il est impossible que l'on ait une relation de la forme [1]

$$R(\alpha, \beta) S(\alpha', \beta') = \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha'},$$

U et V étant des fonctions rationnelles de α, β, α' et β'. Si une telle identité est possible, il est clair que les coefficients de U et de V peuvent être supposés dépendre algébriquement des coefficients de φ et de ψ. Si U et V ne devenaient pas infinies en certains points du continuum (CC'), l'intégrale double (3) prise le long de C et de C' serait nulle. Comme il n'en est pas ainsi, il faut qu'il y ait un certain nombre limité de couples de points (AA') (A étant sur C, et A' sur C') pour lesquels U et V deviennent infinies. Si les cycles C et C' sont, comme on peut toujours le supposer, formés de morceaux de lignes algébriques, les coordonnées de A et A' seront des fonctions algébriques des coefficients de φ et ψ. Un tel point (AA') va jouer ici le même rôle que le point p de C et de C' au numéro précédent; on prendra sur C deux points x_1 et x_2 de part et d'autre de chaque point A, et, en faisant un calcul tout analogue à celui qui a été fait plus haut, on voit que l'intégrale (3) prise le long de C et C' peut être calculée d'une manière purement algébrique, et, par suite, *la période correspondante s'exprimerait algébriquement à l'aide des coefficients de φ et ψ*. Mais il n'en est pas ainsi, puisque la période d'une intégrale abélienne de seconde espèce est, en général, une fonction transcendante des coefficients de l'équation de la courbe. Nous sommes donc assuré d'avoir des intégrales doubles de seconde espèce

$$\iint T(x, y, z)\, dx\, dy$$

qui ne se réduisent pas à une intégrale

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

comme nous voulions l'établir.

---

(1) En prenant $\frac{\partial U}{\partial \alpha}$ on considère, bien entendu, β comme fonction de α, et de même dans le calcul de $\frac{\partial V}{\partial \alpha'}$, on considère β' comme fonction de α'.

IX. — Seconde définition des intégrales de seconde espèce.

29. On peut donner, des intégrales de seconde espèce, une définition qui fait intervenir la considération des *résidus* de l'intégrale double. Nous nous bornons d'ailleurs à une surface ne présentant que des singularités ordinaires. Soit

$$\iint R(x, y, z)\, dx\, dy \tag{1}$$

une intégrale double attachée à la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

On peut toujours supposer, en effectuant préalablement une transformation birationnelle convenable, que l'intégrale devienne infinie seulement le long de certaines courbes simples de la surface ne passant pas par les points triples et pour les points à l'infini. Pour chacune de ces lignes et pour la ligne à l'infini, l'intégrale aura un certain nombre de résidus qui sont des périodes d'intégrales abéliennes. Leur définition résulte de ce que nous avons vu (t. I, p. 49) en étudiant les résidus des intégrales doubles de fractions rationnelles. Soit C une ligne le long de laquelle R devienne infinie, représentée par

$$z = S(x, y), \qquad \varphi(x, y) = 0;$$

prenons, y étant regardé comme un paramètre, le résidu de la fonction de x,

$$R(x, y, z).$$

Ce sera une quantité de la forme

$$\chi(x, y) \qquad [\varphi(x, y) = 0],$$

χ étant rationnelle en x et y. Les périodes (polaires ou cycliques) de l'intégrale abélienne

$$2\pi i \int \chi(x, y)\, dy$$

relatives à la courbe φ sont les *résidus* de l'intégrale (1) relatifs à la courbe C.

30. Supposons que l'intégrale (1) soit de *seconde* espèce ; je dis qu'alors tous les *résidus* relatifs à C sont nuls. Réciproquement, si tous les résidus relatifs à C sont nuls, l'intégrale (1) présente, en un point arbitraire de C, le caractère d'une intégrale de seconde espèce.

La démonstration de ces deux propositions va se faire à la fois. Nous ne diminuons pas la généralité en supposant que la courbe C est une section plane ou une portion d'une section plane de la surface. Nous avons alors, en supposant que le plan de la section soit $x = 0$, l'intégrale double

$$\iint \frac{S(x, y, z)}{x^{\alpha}} \, dx \, dy,$$

la fraction rationnelle S ne devenant pas identiquement infinie pour $x = 0$. En employant les réductions dont nous avons fait si souvent usage dans ce Chapitre, on peut supposer que $\alpha = 1$, et l'on a alors l'intégrale

$$(2) \qquad \iint \frac{S(x, y, z)}{x} \, dx \, dy.$$

Soit C la courbe (ou une des courbes) suivant laquelle le plan $x = 0$ coupe la surface. Les résidus relatifs à la courbe C seront tous nuls, si toutes les périodes de l'intégrale abélienne

$$\int S(0, y, \zeta) \, dy,$$

relatives à la courbe C sont nulles, ζ étant la fonction de y correspondant à la courbe C. Mais on a alors pour l'intégrale précédente une fraction rationnelle

$$K(y, \zeta)$$

et, par suite, en retranchant de (2) l'intégrale

$$(3) \qquad \iint \frac{\partial}{\partial y} \frac{K(y, z)}{x} \, dx \, dy,$$

la différence des intégrales (2) et (3) reste finie en un point *arbitraire* de la courbe C, et, en *tout* point de la courbe C, elle reste finie sur cette courbe dans le voisinage de ce point (le point pouvant être exclu).

Réciproquement, si l'intégrale est une intégrale de seconde espèce, on pourra retrancher de (2) une intégrale de la forme

$$\iint \frac{\partial}{\partial y} \frac{T(x, y, z)}{x} dx\, dy$$

telle que la différence reste finie dans le voisinage de C; on a donc

$$S(0, y, \zeta) = \frac{\partial}{\partial y}[T(0, y, \zeta)]$$

pour la courbe C, et tous les résidus relatifs à C sont nuls.

De là nous concluons que, si pour toutes les courbes C et pour la courbe à l'infini de la surface, tous les résidus sont nuls, l'intégrale est telle que, dans le voisinage de tout point d'une de ces lignes, on peut retrancher une intégrale de la forme voulue, de telle sorte que la différence des deux intégrales reste finie sur la ligne dans le voisinage du point. D'après les résultats de la Section VII, cela suffit à établir que l'intégrale est de seconde espèce. La réciproque est d'ailleurs évidente d'après ce que nous avons vu plus haut.

Ainsi donc nous sommes conduit à une seconde définition des intégrales de seconde espèce *par la considération des résidus de l'intégrale double*.

31. Terminons ce Chapitre par une application des considérations qui précèdent aux intégrales de fonctions rationnelles, en recherchant à quelles conditions l'intégrale

$$(4) \qquad \iint \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} dx\, dy,$$

où P et Q sont des polynomes (dont le second est supposé irréductible), est une intégrale de seconde espèce. D'après ce qui précède, il est nécessaire que l'intégrale abélienne

$$(5) \qquad \int \frac{P(x, y)}{Q'_y(x, y)} dx,$$

relative à la courbe $Q(x, y) = 0$, se réduise à une fraction rationnelle de x et y; c'est la condition pour que les résidus correspondant à la courbe $Q = 0$ soient tous nuls. La condition est suffi-



sante; on va voir, en effet, que, si elle est remplie, on peut retrancher de (4) une intégrale convenable, et la différence mettra en évidence la nature de l'intégrale.

D'après l'hypothèse faite, on peut mettre l'intégrale abélienne (5) sous la forme

$$\int \frac{P(\xi, \eta)}{Q'_\eta(\xi, \eta)} d\xi = \frac{M(\xi, \eta)}{R(\xi)} \qquad [Q(\xi, \eta) = 0],$$

$M(\xi, \eta)$ et $R(\xi)$ étant des polynomes. Formons l'intégrale

$$(6) \quad \iint \left\{ \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{M(x, y)}{Q(x, y) R(x)} \right] - \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{M(x, y)}{Q(x, y) R(x)} \right] \right\} dx\, dy;$$

elle est, comme nous savons, de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Un calcul facile montre que la différence des intégrales (4) et (6) est de la forme

$$\iint \frac{S(x, y)}{V(x)} dx\, dy,$$

S et V étant des polynomes : l'intégrale (4) est donc bien de seconde espèce, puisqu'il en est ainsi de l'intégrale que nous venons de trouver en dernier lieu.

CHAPITRE VIII.

SUITE DE L'ÉTUDE DES INTÉGRALES DOUBLES DE SECONDE ESPÈCE.

I. — Quelques remarques complémentaires sur la réduction des intégrales doubles de seconde espèce.

1. Prenant toujours, comme au Chapitre précédent, une surface

$$f(x, y, z) = 0$$

à singularités ordinaires, nous avons vu que, par des soustractions du type voulu, on pouvait ramener toute intégrale double de seconde espèce à la forme

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}, \tag{1}$$

où $P(x, y, z)$ est un polynome.

Il a été démontré ensuite (p. 182 et suiv.) que, par la soustraction d'une intégrale de la forme

$$\iint \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right] dx\,dy,$$

où U et V sont des polynomes en x, y et z, on pouvait ramener l'intégrale (1) à l'intégrale

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}, \tag{2}$$

où le degré du polynome Q est limité.

La réduction précédente ne suppose en rien que le polynome P s'annule sur la courbe double de la surface, quoique ce soit à ce

cas que l'on puisse toujours se trouver ramené. Mais si P s'annule sur la courbe double, il n'en est pas nécessairement de même pour Q, du moins si l'on fait la réduction telle que nous l'avons présentée. Il est cependant exact que toutes les intégrales de seconde espèce se ramènent au type (2), où Q s'annule sur la courbe double et où son degré est limité (quoique cette limite puisse être plus élevée qu'avec la réduction primitive). On pourrait le démontrer directement en modifiant un peu l'analyse des nos 18 et 19 du Chapitre précédent : on assujettirait les polynomes U et V qui y figurent à s'annuler sur la courbe double, ce qui n'entraîne pas de modifications importantes dans les raisonnements; la limite, je le répète, pour le degré du polynome Q, pourra être plus élevée que dans le premier cas.

2. On peut arriver au même résultat par une voie indirecte. Effectuons sur la surface f une transformation birationnelle telle que la courbe double de f devienne sur la surface transformée F une ligne simple L, nécessairement composée d'*une* ou de *deux* courbes irréductibles; la transformation birationnelle peut d'ailleurs être prise de telle sorte que F n'ait que des singularités ordinaires. L'intégrale transformée ne devient plus alors infinie sur la ligne double; on peut donc faire les réductions habituelles, et, en revenant à la surface f, on a une intégrale double qui ne devient plus infinie sur la ligne double : par suite, toute intégrale double de f se ramène à la forme (2), où le degré du polynome Q est limité et où ce polynome s'annule sur la courbe double.

Nous venons de dire que la ligne L de F correspondant à la ligne double de f se composait d'*une* ou de *deux* courbes irréductibles. Si l'on considère en effet la ligne double C de f, les deux plans tangents en un point arbitraire de C dépendent rationnellement de

$$x,\quad y,\quad z \qquad \text{et} \qquad \sqrt{(f''_{zy})^2 - f''_{z^2} f''_{y^2}}.$$

Il arrivera en général que le radical précédent ne sera pas une fonction rationnelle de (x, y, z) quand ce point est sur C, mais il pourra en être ainsi dans certains cas particuliers, et ces deux circonstances correspondent aux deux cas visés. Quand on se trouve dans le premier cas, que l'on peut regarder comme le cas

général, on ramènera une intégrale de seconde espèce de la forme (1), où P ne s'annule pas sur la courbe double, à une intégrale de même forme, mais où P s'annule sur cette courbe par la soustraction d'une intégrale de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad (\text{A et B rationnels en } x,\ y \text{ et } z).$$

La raison en est qu'en faisant disparaître dans (1) autour d'un point de la courbe double la ligne d'infini envisagée comme appartenant à une des nappes, on fait disparaître en même temps cette ligne regardée comme appartenant à l'autre nappe; car, avec l'hypothèse faite, une fonction rationnelle de x, y et z restant finie sur l'une des nappes de la surface, dans le voisinage d'un point pris arbitrairement sur la courbe double, reste encore finie sur l'autre nappe de la surface.

3. Les considérations suivantes se rattachent au même ordre d'idées. Supposons que $P(x, y, z)$ étant un polynome s'annulant sur la courbe double, on ait une identité de la forme

$$\frac{P(x, y, z)}{f'_z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right), \tag{3}$$

U et V étant des polynomes en x, y et z. Je dis que U et V s'annuleront nécessairement sur la courbe double, si nous sommes dans ce que j'ai appelé plus haut le *cas général*.

Prenons sur la courbe double un point arbitraire A; dans le voisinage de ce point, sur une nappe déterminée de la surface, l'expression

$$\frac{P}{f'_z}$$

est une fonction holomorphe de x et y. On peut donc écrire sur la nappe considérée et dans le voisinage de A

$$\frac{P(x, y, z)}{f'_z} = \frac{\partial \lambda}{\partial y},$$

λ étant holomorphe en x et y autour de A. Par suite, d'après (3),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z} - \lambda\right) = 0.$$

Donc l'intégrale

$$\int \frac{U\,dy - (V - \lambda f'_z)\,dx}{f'_z}$$

est une intégrale de différentielle totale, parfaitement définie autour de A sur la nappe considérée de la surface. La courbe double peut être une courbe logarithmique de cette intégrale, et la période logarithmique correspondante est la période logarithmique de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{U(\bar{x}, y, z)\,dy}{f'_z},$$

relative à la courbe entre y et z, $f(\bar{x}, y, z) = 0$. Elle est, par suite, égale à la valeur de

$$\frac{2\pi i\, U(\bar{x}, y, z)}{\sqrt{(f''_{zy})^2 - f''_{z^2} f''_{y^2}}}$$

pour les points doubles de la courbe $f(\bar{x}, y, z) = 0$. On en conclut de suite que l'expression

$$\frac{U(x, y, z)}{\sqrt{(f''_{zy})^2 - f''_{z^2} f''_{y^2}}}$$

a une valeur constante sur la courbe double de la surface. Si nous sommes dans *le cas général* (*voir* numéro précédent), le radical sera susceptible d'avoir changé de signe, quand (x, y, z) partant d'un point de la courbe double y reviendra après avoir décrit un chemin convenable. La valeur constante de l'expression précédente sera donc alors nécessairement nulle, et par suite U s'annulera sur la courbe double, comme nous voulions l'établir; il en sera nécessairement de même de V.

II. — Sur le nombre des conditions exprimant que certaines intégrales doubles sont de seconde espèce.

4. Toutes les intégrales doubles de seconde espèce relatives à une surface de degré m

$$f(x, y, z) = 0,$$

se ramenant, comme on l'a vu (p. 188 et suiv.), par une soustrac-

tion convenable, à une intégrale de la forme

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}, \tag{1}$$

P étant un polynome de degré limité s'annulant sur la courbe double, il restait alors à exprimer que l'intégrale précédente est de seconde espèce; c'est ce que nous avons fait, et nous avons montré que le nombre de ces conditions est, en général,

$$2\pi + m - 1,$$

π désignant le genre d'une section plane quelconque de la surface. En fait, $m - 1$ de ces conditions sont remplies d'elles-mêmes, de sorte qu'il reste 2π conditions; c'est ce que nous allons montrer maintenant en même temps que nous présenterons sur ces conditions diverses remarques (¹).

5. Ces conditions sont relatives aux points à l'infini de la surface. Posons

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{Y}{X}, \qquad z = \frac{Z}{X}$$

et soit alors $F(X, Y, Z) = 0$ l'équation de la surface transformée. L'intégrale devient

$$\iint \frac{1}{X^{p-(m-4)}} \frac{H(X, Y, Z)}{F'_Z}\, dX\, dY, \tag{2}$$

$H(X, Y, Z)$ étant un polynome de degré p s'annulant sur la courbe double. Si p est au plus égal à $m - 4$ l'intégrale est de première espèce. Soit donc

$$p > m - 4;$$

par la soustraction d'une intégrale convenable de la forme

$$\iint \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{A(X, Y, Z)}{X^{p-(m-3)}} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{B(X, Y, Z)}{X^{p-(m-4)}} \right] \right\} dX\, dY,$$

où A et B sont des polynomes, on obtient une intégrale

$$\iint \frac{1}{X} \frac{K(X, Y, Z)}{F'_Z}\, dX\, dY,$$

(¹) E. Picard, *Sur le nombre des conditions exprimant qu'une intégrale double est de seconde espèce* (*Annales de l'École normale*, 1902).



$K(X, Y, Z)$ étant un polynome s'annulant sur la courbe double. Pour que cette intégrale soit de seconde espèce, nous avons montré (*loc. cit.*) qu'il faut et il suffit que la fonction algébrique de Y,

$$\frac{K(0, Y, Z)}{F'_Z(0, Y, Z)} \qquad [F(0, Y, Z) = 0], \tag{3}$$

soit la dérivée d'une fonction rationnelle de Y et Z. Si le polynome K n'était pas soumis à certaines conditions, par suite de la manière même dont il a été obtenu, il y aurait manifestement

$$2\pi + m - 1$$

conditions exprimant que l'expression (3) est la dérivée d'une fonction rationnelle de Y et Z. Mais le polynome $K(X, Y, Z)$ se trouve soumis à certaines conditions. Pour approfondir davantage la question, remarquons que, l'intégrale double (2) étant de seconde espèce, tout résidu relatif à la courbe $X = 0$ doit être nul. Parmi ces résidus se trouvent les m résidus correspondant à un petit cercle autour de $X = 0$ et à un très grand cercle dans le plan de la variable Y, ou plus exactement dans un feuillet de la surface de Riemann $F(\overline{X}, Y, Z) = 0$. *Nous allons montrer que ces résidus sont nuls.*

6. Cherchons à cet effet le développement de

$$\frac{H(X, Y, Z)}{F'_Z}$$

pour Y très grand. L'équation $F = 0$ peut s'écrire

$$\varphi(Y, Z) + X\varphi_1(Y, Z) + \ldots = 0,$$

$\varphi, \varphi_1, \ldots$ étant des polynomes en Y et Z de degrés $m, m-1, \ldots$. Si l'on pose

$$Y = \frac{1}{\eta}, \qquad Z = \frac{\zeta}{\eta},$$

on aura

$$\Phi(\eta, \zeta) + X\eta\Phi_1(\eta, \zeta) + \ldots = 0.$$

Les m racines $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ de l'équation

$$\Phi(0, \zeta) = 0$$

sont distinctes, les axes ayant été choisis arbitrairement. La racine ζ devenant égale à ζ_i pour $\eta = 0$ se développe de la manière suivante :

$$\zeta = \zeta_i + \alpha_1 \eta + \alpha_2 \eta^2 + \ldots,$$

et l'on reconnaît facilement que les α sont des polynomes en X de degrés marqués par les indices, de sorte que α_h est un polynome de degré h en X. Nous avons donc pour la branche considérée

$$Z = \frac{\zeta_i}{\eta} + \alpha_1 + \alpha_2 \eta + \ldots$$

et, par suite,

$$Z = \zeta_i Y + \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{Y} + \ldots + \frac{\alpha_n}{Y^{n-1}} + \ldots.$$

Soit maintenant

$$H(X, Y, Z) = H_p(Y, Z) + XH_{p-1}(Y, Z) + \ldots:$$

son développement suivant les puissances de Y sera de la forme

$$\beta_0 Y^p + \beta_1 Y^{p-1} + \ldots + \beta_p + \frac{\beta_{p+1}}{Y} + \frac{\beta_{p+2}}{Y^2} + \ldots,$$

les β étant des polynomes en X de degrés marqués par les indices. De même, le développement de F'_Z sera de la forme

$$\gamma_0 Y^{m-1} + \gamma_1 Y^{m-2} + \ldots + \gamma_{m-1} + \frac{\gamma_m}{Y} + \ldots,$$

les γ étant encore des polynomes en X de degrés marqués par les indices. On voit alors que, si l'on développe

$$\frac{H(X, Y, Z)}{F'_Z}$$

suivant les puissances de Y, on a

$$\frac{H(X, Y, Z)}{F'_Z} = Y^{p-(m-1)} \left(\delta_0 + \frac{\delta_1}{Y} + \frac{\delta_2}{Y^2} + \ldots \right),$$

les δ étant des polynomes en X de degrés marqués par les indices. Le coefficient de

$$\frac{1}{Y}$$

dans ce développement est δ_{p-m+2}.

En revenant à l'intégrale double

$$\iint \frac{1}{X^{p-(m-4)}} \frac{H(X, Y, Z)}{F'_Z} dX\, dY,$$

une première intégration autour d'un très grand cercle dans le plan de la variable Y nous donne

$$2\pi i \frac{\delta_{p-m+2}}{X^{p-m+4}},$$

et, en intégrant cette expression autour de $X = 0$, on obtient *zéro*.

7. Si nous nous rappelons maintenant l'identité

$$\frac{1}{X^{p-(m-4)}} \frac{H(X, Y, Z)}{F'_Z}$$
$$= \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{A(X, Y, Z)}{X^{p-(m-3)}}\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{B(X, Y, Z)}{X^{p-(m-4)}}\right] + \frac{1}{X} \frac{K(X, Y, Z)}{F'_Z},$$

et si nous faisons dans les deux membres l'intégration double précédemment indiquée, les deux premiers termes du second membre donneront *zéro*, et par suite l'intégrale double

$$\iint \frac{1}{X} \frac{K(X, Y, Z)}{F'_Z} dX\, dY$$

sera nulle pour le continuum indiqué. Or sa valeur est précisément

$$2\pi i \int_\Gamma \frac{K(0, Y, Z)\, dY}{F'_Z(0, Y, Z)} \qquad [F(0, Y, Z) = 0],$$

cette intégrale simple étant prise sur un très grand cercle Γ dans un feuillet de la surface de Riemann $F(0, Y, Z) = 0$. Donc l'expression

$$\frac{K(0, Y, Z)}{F'_Z(0, Y, Z)}$$

a tous ses résidus nuls pour $Y = \infty$. Par suite, quand on écrira que cette expression est la dérivée d'une fonction rationnelle de Y et Z, ou, ce qui revient au même, quand on écrira que l'intégrale abélienne

$$\int \frac{K(0, Y, Z)}{F'_Z(0, Y, Z)} dY \qquad [F(0, Y, Z) = 0]$$

est une fonction rationnelle de Y et Z, on n'aura pas besoin d'écrire que les périodes polaires correspondant aux points à l'infini sont nulles. Il suffira d'écrire que les 2π périodes cycliques sont nulles, ce qui d'ailleurs n'exigera, comme il est bien connu, que des opérations algébriques.

8. Le résultat que nous venons d'obtenir aurait pu être démontré encore plus simplement, ou du moins on aurait pu y arriver, en restant dans le même ordre d'idées, sans passer par les développements en séries dont nous avons fait usage. Reprenons l'intégrale primitive

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

et posons

$$x = \frac{X'}{Y'}, \qquad y = \frac{1}{Y'}, \qquad z = \frac{Z'}{Y'}.$$

Aux valeurs $X = 0$, $Y = \infty$ considérées tout à l'heure correspondent $\left(\text{puisque } X' = \frac{1}{Y}, Y' = \frac{X}{Y}\right)$

$$X' = 0, \qquad Y' = 0.$$

L'intégrale primitive se transforme en

$$(4) \qquad \iint \frac{1}{Y'^{p-(m-4)}} \frac{H_1(X', Y', Z')}{F'_{Z'}} dX'\, dY',$$

en désignant par $F(X', Y', Z') = 0$ la nouvelle équation de la surface.

Cette seconde intégrale, prise le long de deux petites circonférences autour de $X' = 0$, $Y' = 0$, est nulle, puisque l'intégrale

$$\int \frac{H_1(X', Y', Z')}{F'_{Z'}} dX' \qquad [F(X', \overline{Y}', Z') = 0]$$

(Y' étant constant et très petit), prise le long d'une petite circonférence autour de $X' = 0$, est manifestement nulle. Or, puisque

$$X = \frac{Y'}{X'}, \qquad Y = \frac{1}{X'},$$

aux deux cercles très petits C' et C'_1 autour de $X' = 0$, $Y' = 0$ correspondent dans le plan Y un cercle très grand, et dans le

plan X un cercle très petit si les rayons de C'_1 et C' sont eux-mêmes dans un rapport très petit; nous retrouvons donc le résultat obtenu dans un des paragraphes précédents.

9. On peut encore retrouver à un autre point de vue les 2π conditions exprimant que l'intégrale double (1) est de seconde espèce. Si nous envisageons la courbe entre x et z

$$f(x, \bar{y}, z) = 0, \tag{5}$$

les périodes de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{P(x, \bar{y}, z)\,dx}{f'_z} \tag{6}$$

seront nécessairement des fonctions de y.

Parmi ces périodes se trouvent les périodes logarithmiques correspondant aux divers points à l'infini de la courbe précédente. Examinons d'abord la nature de ces périodes logarithmiques. Soit prise l'équation de la courbe sous la forme

$$f_m(x, z) + y f_{m-1}(x, z) + \ldots + y^m f_0 = 0,$$

les f étant des polynomes en x et z de degrés marqués par l'indice. Si nous posons

$$x = \frac{1}{X}, \qquad z = \frac{Z}{X},$$

l'équation deviendra

$$F_m(X, Z) + y X F_{m-1}(X, Z) + \ldots + y^m X^m F_0 = 0. \tag{7}$$

D'après nos hypothèses sur la disposition arbitraire de la surface par rapport aux axes, l'équation

$$F_m(0, Z) = 0$$

aura ses m racines distinctes que j'appellerai $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$. La courbe (7) passe, quel que soit y, par m points fixes

$$(0, Z_1), \quad (0, Z_2), \quad \ldots, \quad (0, Z_m).$$

Dans le voisinage du point $(0, Z_i)$, le développement de Z suivant les puissances de X sera de la forme

$$Z_i + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_m X^m + \ldots,$$

les α étant des polynomes par rapport à y, comme le montre

immédiatement le calcul des dérivées successives de Z pour $X = 0$. Si l'on cherche alors le résidu de l'intégrale (6) pour le point $(0, Z_i)$, on trouve immédiatement que ce résidu est un polynome en y. Il en résulte que *les périodes logarithmiques correspondant aux points à l'infini sont, pour l'intégrale* (6), *des polynomes en* y.

10. Outre ces m résidus (se réduisant évidemment à $m-1$), l'intégrale (6) a en général 2π périodes cycliques qui sont des fonctions de y, et l'ensemble de ces périodes satisfait à une équation différentielle linéaire E′ d'ordre

$$2\pi + m - 1,$$

dont les coefficients sont rationnels en y. En raisonnant comme à la page 97 du Tome I, on voit de suite que le point $y = \infty$ n'est pas un point critique de l'équation E′; toutes les intégrales de cette équation ont ce point comme pôle ou comme point ordinaire. Soit

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2\pi},$$

un système de périodes cycliques. Toutes ces fonctions ω de y doivent avoir leur résidu nul à l'infini, si l'intégrale (1) est de seconde espèce; dans le cas contraire, en effet, en prenant l'intégrale

$$\int \omega \, dy$$

autour du point $y = \infty$, on aurait un *résidu* de l'intégrale double, qui par suite ne serait pas de seconde espèce.

En écrivant donc que les 2π périodes ω ont un résidu nul à l'infini, on doit nécessairement retrouver les 2π conditions dont il a été parlé plus haut. On peut d'ailleurs vérifier directement qu'il en est bien ainsi. Si l'on part en effet de la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

et qu'on fasse

$$x = \frac{X}{Y}, \qquad y = \frac{1}{Y}, \qquad z = \frac{Z}{Y},$$

l'intégrale

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

se transforme en

$$\iint \frac{1}{Y^{p-(m-4)}} \frac{\Pi(X, Y, Z)}{F'_Z} dY\, dY.$$

D'après ce que nous avons dit plus haut (il y a seulement permutation de X et Y), l'intégrale double est de seconde espèce si toute période de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{1}{Y^{p-m+4}} \frac{\Pi(X, Y, Z)}{F'_Z} dX,$$

relative à la courbe entre X et Z

(8) $$F(X, \overline{Y}, Z) = 0,$$

a son résidu nul pour $Y = 0$. Mais ceci revient à dire que toute période de l'intégrale abélienne

(9) $$\int \frac{P(x, y, z)\, dx}{f'_z},$$

relative à la courbe entre x et z

(10) $$f(x, \overline{y}, z) = 0,$$

a son résidu nul pour $y = \infty$, car les deux courbes (8) et (10) se correspondent point par point. Nous retrouvons donc bien les conditions déjà trouvées.

Si l'intégrale double

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

était de *première* espèce, l'intégrale (9) serait une intégrale de première espèce pour la courbe (10) et les $m - 1$ périodes polaires seraient nulles.

III. — Des intégrales doubles de fonctions rationnelles de seconde espèce.

11. A la fin du Chapitre VII (n° 25) nous avons dit un mot du cas où l'on considère seulement des intégrales doubles de fractions rationnelles de x et y. D'après la théorie générale, si

(1) $$\int\int F(x, y)\, dx\, dy,$$

F étant une fonction rationnelle de x et y, est une intégrale double

de seconde espèce, on aura nécessairement

$$F(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de x et y. On peut en effet considérer que cette intégrale double est relative à la surface

$$z = ax + by + c,$$

et, par suite, si elle est de seconde espèce, elle peut se ramener par la soustraction habituelle à

$$\iint p(x, y)\, dx\, dy,$$

p étant un polynome en x et y, et l'on a bien par suite pour F la forme indiquée.

Il est intéressant cependant de traiter la question à un autre point de vue sans se reporter à aucun théorème général sur les surfaces algébriques, et nous allons nous poser la question suivante ([1]) :

Quels sont les caractères d'une intégrale double de fonction rationnelle dont tous les résidus sont nuls ?

Une question analogue se pose dans les éléments quand, étant considérée une fonction rationnelle d'une variable $F(x)$, on demande à quelles conditions les résidus de l'intégrale simple

$$\int F(x)\, dx$$

sont nuls. La réponse est alors que

$$F(x) = \frac{dU}{dx},$$

U étant une fonction rationnelle de x.

Nous allons avoir, pour notre problème, une réponse présentant une analogie intéressante avec la question élémentaire que je viens de rappeler.

([1]) E. Picard, *Sur les intégrales doubles de fonctions rationnelles dont tous les résidus sont nuls* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1902).

La condition nécessaire et suffisante pour que tous les résidus de l'intégrale double (1) *soient nuls est que l'on ait*

$$F(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \tag{2}$$

P *et* Q *étant des fonctions rationnelles de* x *et* y.

On aura ainsi en même temps une manière élégante d'exprimer les conditions pour qu'une fonction rationnelle de x et y puisse se mettre sous la forme (2).

12. Il est d'abord très aisé de montrer que la condition est suffisante. On va voir en effet que les résidus de

$$\int\int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy$$

sont nuls, P et Q représentant des fonctions rationnelles de x et y. La chose est immédiate pour

$$\int\int \frac{\partial P}{\partial x} dx\, dy,$$

puisqu'on doit prendre d'abord, pour une valeur constante donnée à y, l'intégrale

$$\int \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

le long d'un contour fermé, ce qui donne *zéro*.

En ce qui concerne la seconde intégrale, soit

$$Q = \frac{M(x, y)}{A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda},$$

A, B, ..., L étant des polynomes irréductibles en x et y, contenant la lettre x; α, ..., λ sont des entiers positifs; et désignons par x_1 la fonction algébrique de y correspondant à $A(x_1, y) = 0$. Le résidu de la fonction Q de x, pour $x = x_1$, sera visiblement une fonction rationnelle

$$\rho(x_1, y)$$

de x_1 et y, et le résidu de $\frac{\partial Q}{\partial y}$, pour $x = x_1$, sera

$$\frac{d}{dy}\rho(x_1, y).$$

Un résidu de l'intégrale double

$$\iint \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy$$

par rapport au continuum $A(x_1, y) = 0$ sera donc une période de l'intégrale abélienne

$$2\pi i \int \frac{d}{dy}[\rho(x_1, y)]\, dy,$$

c'est-à-dire *zéro*.

13. Passons à la réciproque. Il s'agit de démontrer que :

Si tous les résidus de l'intégrale double

$$\iint F(x, y)\, dx\, dy$$

sont nuls, on aura

$$F(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y},$$

V *et* W *étant rationnelles en* x *et* y.

En posant comme plus haut

$$F = \frac{M(x, y)}{A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda},$$

on peut tout d'abord, d'après les éléments de la théorie des fractions rationnelles d'une variable, mettre F sous la forme

$$F = \frac{\pi_1(x, y)}{A} + \frac{\pi_2(x, y)}{B} + \ldots + \frac{\pi_l(x, y)}{L} + \frac{\partial \chi}{\partial x},$$

les π étant des polynomes en x à coefficients rationnels en y et χ une fonction rationnelle de x et y. Les résidus de F relatifs au continuum $A(x, y) = 0$ sont les périodes de l'intégrale abélienne

$$2\pi i \int \frac{\pi_1(x, y)}{A'_x}\, dy$$

relative à la courbe algébrique $A(x, y) = 0$. D'après les hypothèses faites, l'intégrale précédente est une fonction rationnelle de x et y, et l'on peut par suite écrire

$$\int \frac{\pi_1(x, y)\, dy}{A'_x} = H(x, y),$$

H étant un polynome en x, à coefficients rationnels en y.

De là résulte que l'on a

$$\frac{\pi_1(x,y)}{A'_x} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial y}}{\frac{\partial A}{\partial x}}.$$

Cette identité a d'ailleurs lieu en vertu de la relation $A(x,y)=0$. On peut dire par conséquent que le polynome en x

$$\pi_1(x,y) - \left(\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial y}\right)$$

est divisible, quel que soit y, par $A(x,y)$, et nous pouvons écrire l'identité en x et y

$$\pi_1(x,y) - \left(\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial y}\right) = C(x,y)\,A(x,y),$$

C étant un polynome en x, à coefficients rationnels en y.

Ceci posé, envisageons l'expression

$$U = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{H}{A}\right) - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H}{A}\right),$$

qui est de la forme $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$, comme tout déterminant fonctionnel. D'ailleurs

$$U = \frac{\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x}}{A}.$$

Si donc nous retranchons U de F, le terme $\frac{\pi_1}{A}$ se trouvera remplacé par

$$C(x,y),$$

où C est un polynome en x, qui est par suite de la forme $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$. Nous avons donc ainsi fait disparaître, par une soustraction d'un terme de la forme voulue, l'expression $\frac{\pi_1}{A}$. On fera le même calcul pour $\frac{\pi_2}{B}, \ldots, \frac{\pi_l}{L}$ et finalement *nous trouvons bien*

$$F(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y},$$

V *et* W *étant rationnelles en* x *et* y, comme nous voulions l'établir.

14. La recherche des conditions, pour qu'une fonction rationnelle $F(x, y)$ soit de la forme précédente, se trouve donc ramenée à la recherche des conditions pour qu'une intégrale abélienne soit algébrique; c'est un problème classique, sur lequel nous n'avons pas à insister. Le problème proposé se trouve alors très élégamment résolu.

On pourrait traiter la question relative à la fonction F, sans se reporter à la théorie des résidus des intégrales doubles. Le problème paraît en effet tout élémentaire; sa solution directe est cependant moins immédiate qu'on pourrait d'abord le penser. C'est cette solution directe que nous allons maintenant exposer.

Tout d'abord, comme nous l'avons dit plus haut, F peut être supposé de la forme

$$\frac{M(x, y)}{AB\ldots L},$$

M étant un polynome en x, rationnel en y, et A, B, ..., L des polynomes en x et y, irréductibles et renfermant x. Soit donc

$$(3) \qquad \frac{M(x, y)}{AB\ldots L} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y};$$

P et Q doivent devenir infinies pour $A = 0$, pour $B = 0$, ..., $L = 0$ et peuvent aussi devenir infinies pour d'autres courbes $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, ..., $N_1 = 0$.

Je dis d'abord qu'on peut supposer que P et Q renferment seulement à la première puissance A, B, ..., L et, s'ils existent, $A_1, B_1, \ldots, N_1$.

Supposons en effet que Q renferme A^α $(\alpha > 1)$ au dénominateur; on peut, d'après les éléments, trouver une fraction rationnelle

$$R = \frac{\chi(x, y)}{A^{\alpha-1}},$$

χ étant un polynome en x, rationnel en y, de telle sorte que

$$Q - \frac{\partial R}{\partial x}$$

contienne seulement dans son dénominateur A à la première puissance. Or on peut écrire le second membre de (3) sous la



forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(P + \frac{\partial R}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(Q - \frac{\partial R}{\partial x}\right).$$

On a alors une expression de la forme

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y},$$

où Q_1 et par suite P_1 deviennent seulement infinies comme $\frac{1}{A}$. Le même raisonnement s'applique à tous les autres dénominateurs. Nous pouvons donc supposer que notre identité a la forme

$$(4)\quad \frac{M(x,y)}{AB\ldots L} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{H(x,y)}{AB\ldots LA_1B_1\ldots N_1}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{K(x,y)}{AB\ldots LA_1B_1\ldots N_1}\right];$$

H et K sont des polynomes en x, rationnels en y. Les polynomes au dénominateur sont irréductibles, distincts et renferment x. Nous ne savons rien des polynomes $A_1, B_1, \ldots, N_1$, mais on peut heureusement, comme nous l'allons voir, les faire disparaître, et c'est là *le point essentiel dans la recherche que nous effectuons.*

Soit (x_0, y_0) un point arbitraire de la courbe

$$A_1(x,y) = 0.$$

Le premier membre de (4) est une fonction holomorphe des deux variables indépendantes x et y dans le voisinage de (x_0, y_0); nous pouvons, dans le voisinage de cette valeur, l'écrire sous la forme $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, en désignant par φ une fonction holomorphe autour de (x_0, y_0). Nous aurons donc

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H}{AB\ldots LA_1\ldots N_1} - \varphi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K}{AB\ldots LA_1\ldots N_1}\right) = 0.$$

Envisageons alors l'intégrale de différentielle totale

$$\int \frac{K}{AB\ldots LA_1\ldots N_1}\,dx - \left(\frac{H}{AB\ldots LA_1\ldots N_1} - \varphi\right)dy;$$

c'est une intégrale de différentielle totale possédant, dans le voisinage de (x_0, y_0), toutes les propriétés d'une intégrale de différentielle totale de fonctions rationnelles. En particulier, *les périodes*

de l'intégrale de fonction rationnelle de x

$$\int \frac{K}{AB\ldots LA_1\ldots N_1}\,dx \tag{5}$$

ne dépendent pas du paramètre y. C'est là pour nous un point capital; nous en concluons que l'expression

$$2\pi i \frac{K}{AB\ldots L\dfrac{\partial A_1}{\partial x}B_1\ldots N_1},$$

qui, pour x racine de l'équation $A_1(x, y) = 0$, représente une période de l'intégrale (5), ne dépend pas de y. On a donc

$$\frac{K}{AB\ldots L\dfrac{\partial A_1}{\partial x}B_1\ldots N_1} = \gamma,$$

γ étant une constante convenable, et x et y étant liées par la relation $A_1(x, y) = 0$; on peut encore dire que le polynome en x

$$K - \gamma . AB\ldots L\frac{\partial A_1}{\partial x}B_1\ldots N_1$$

est divisible par $A_1(x, y)$. Envisageons alors le second membre de (4) mis sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{H(x, y)}{AB\ldots LA_1\ldots N_1} + \gamma\frac{\partial \log A_1}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{K(x, y)}{AB\ldots LA_1\ldots N_1} - \gamma\frac{\partial \log A_1}{\partial x}\right];$$

on voit de suite, d'après ce qui précède, que la fraction rationnelle sous le signe $\frac{\partial}{\partial y}$ ne renferme plus A_1 au dénominateur, et il en est par suite de même de la fraction rationnelle sous le signe $\frac{\partial}{\partial x}$.

On peut ainsi faire disparaître tous les dénominateurs A_1, B_1, ..., N_1 et, par suite, nous pouvons admettre que, dans le second membre de (4), *les polynomes connus* A, B, ..., L *figurent seuls au dénominateur.*

15. La question proposée se résoudra maintenant aisément. Désignons par P le produit $AB\ldots L$; nous avons l'identité

$$\frac{M(x, y)}{P} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{H(x, y)}{P}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{K(x, y)}{P}\right], \tag{6}$$



où M, H et K sont des polynomes en x. Soit ν le degré de P en x; on sait que, d'une fraction rationnelle en x

$$\frac{K(x, y)}{P},$$

on peut retrancher une expression $\frac{\partial V}{\partial x}$ (V étant un polynome en x, ici rationnel en y), de telle sorte que, en posant

$$\frac{K(x, y)}{P} - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{K_1(x, y)}{P},$$

le degré de K_1 en x soit au plus $\nu - 1$. D'ailleurs, par une soustraction analogue, nous pouvons supposer que M est en x de degré $\nu - 1$ au plus. Par suite, dans l'identité (6), nous pouvons supposer que la fonction donnée M, polynome en x et rationnelle en y, est de degré $\nu - 1$ en x, et qu'il en est de même pour les deux fonctions inconnues H et K.

Les inconnues dans l'identité (6) sont alors les coefficients des diverses puissances de x dans H et K. Si le problème est possible, on devra pouvoir choisir pour ces coefficients des fonctions rationnelles de y.

Or comptons le nombre des inconnues et le nombre des conditions. Nous avons dans H et K un nombre de coefficients égal à 2ν. On doit égaler le second membre de (6) à

$$\frac{M}{P} \quad \text{ou} \quad \frac{MP}{P^2}.$$

Les numérateurs sont de part et d'autre des polynomes de degré $2\nu - 1$; on a donc à identifier deux polynomes de degré $2\nu - 1$, ce qui donne 2ν relations entre les 2ν fonctions rationnelles inconnues de y. Ces relations constituent un système d'équations différentielles linéaires, car les dérivées premières des ν fonctions de y se trouvant dans K figurent dans ces relations. *On est donc ramené, en dernière analyse, à reconnaître si une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels en y admet comme solution une fonction rationnelle de y.* C'est là un problème que l'on sait résoudre.

On voit que la solution de la question proposée prend une tout autre forme, en suivant cette voie directe, qu'avec la méthode

d'abord indiquée où l'on envisageait les résidus d'une intégrale double; l'énoncé des conditions se présente sous une forme beaucoup moins élégante.

16. Il est intéressant de se rendre compte du degré d'indétermination de la solution (H, K) de l'identité (6), quand elle est susceptible de solution, en supposant toujours, comme ci-dessus, que H et K sont de degré $\nu - 1$ en x. Avec deux solutions différentes, on peut former une solution, non identiquement nulle, de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H}{P}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K}{P}\right) = 0.$$

Alors l'intégrale

$$\int \frac{K}{P}\,dx - \frac{H}{P}\,dy \tag{7}$$

est une intégrale de différentielle totale. En posant, comme plus haut,

$$P = AB\ldots L,$$

elle est nécessairement de la forme

$$\alpha \log A + \beta \log B + \ldots + \lambda \log L,$$

$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant des constantes. Inversement, en mettant l'expression précédente sous forme d'intégrale (7), on aura des valeurs admissibles de H et K.

Il résulte de là que, si l'identité (6) a une solution, cette solution renferme les constantes arbitraires $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ en nombre égal à celui des facteurs irréductibles de P.

IV. — D'une difficulté qui se présente quand on veut exprimer que des intégrales doubles de seconde espèce sont distinctes.

17. Nous avons dit que des intégrales doubles de seconde espèce relatives à une surface algébrique sont distinctes, quand il n'existe pas de combinaison linéaire à coefficients constants de ces intégrales qui soit de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{1}$$

U et V étant rationnelles en x, y et z. Il serait donc facile de reconnaître si des intégrales doubles de seconde espèce sont distinctes, si l'on savait résoudre le problème suivant :

Reconnaître si une intégrale double

$$\iint R(x, y, z)\, dx\, dy \tag{2}$$

est de la forme (1), *ce qui revient à reconnaître si l'on a*

$$R(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}, \tag{3}$$

R *étant une fonction rationnelle donnée de* x, y *et* z ; les deux fonctions U et V doivent être rationnelles en x, y et z.

18. Nous avons vu que le problème précédent pouvait être facilement résolu, si l'on est *dans le champ rationnel,* c'est-à-dire si R est simplement fonction rationnelle de x et y, les fonctions U et V étant aussi des fonctions rationnelles de x et y. C'est le problème traité dans la section précédente ; ce qui nous a permis de résoudre assez facilement ce problème, c'est que, dans l'identité

$$R(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y},$$

on a le droit, comme nous l'avons montré, de supposer que U et V n'ont d'autres lignes d'infini que celles de R, à l'exception toutefois de lignes correspondant à $y = \text{const.}$ Nous avons pu alors limiter la manière dont x figure dans U et V, et des opérations en nombre fini nous ont montré si le problème était ou non possible.

Les circonstances sont tout autres dans le cas d'une surface algébrique. Il peut n'être pas permis de supposer que, dans l'identité (3), U et V n'ont d'autres lignes d'infini que celles de R, en dehors de lignes correspondant à $y = \text{const.}$ C'est ce que nous allons montrer sur un exemple ([1]).

Nous avons d'ailleurs déjà, dans un autre but, parlé de cet

([1]) E. PICARD, *Comptes rendus,* octobre 1899.

exemple (page 198 de ce volume). Reportons-nous à l'identité de la page 199

$$(4)\qquad \frac{U(x,y)}{z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{P(x)}{(y-x)z}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{P(y)}{(x-y)z}\right],$$

où $U(x, y)$ est un polynome en x et y, et où

$$z^2 = P(x)\,P(y),$$

$P(x)$ désignant un polynome arbitraire ayant des racines distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Nous allons montrer qu'on ne peut avoir une identité de la forme

$$(5)\qquad \frac{U(x,y)}{z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\pi(x,y)}{z}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\pi_1(x,y)}{z}\right],$$

en représentant par π et π_1 des polynomes entiers en x, à coefficients rationnels en y. Considérons en effet, comme nous l'avons fait pages 199 et 200, l'intégrale double

$$\iint \frac{U(x,y)}{z}\,dx\,dy,$$

prise le long d'un cycle à deux dimensions formé par une courbe fermée C du plan de la variable x qui comprenne à son intérieur deux des points a, et par une courbe fermée C′ analogue dans le plan de la variable y, et supposons que nous soyons dans le cas de la figure de la page 200; dans ce cas l'intégrale double a *une valeur différente de zéro.* Or si nous avions l'identité (5), l'intégrale serait nécessairement nulle (en évitant toutefois de faire passer le contour C′ par une valeur de y rendant infini π ou π_1). En effet, chacune des intégrales

$$\iint \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\pi(x,y)}{z}\right] dx\,dy, \quad \iint \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\pi_1(x,y)}{z}\right] dx\,dy$$

se calcule immédiatement; car, tous les éléments restant finis dans les deux intégrales sur le domaine d'intégration, on n'a qu'à faire une première intégration, par rapport à x pour l'une et par rapport à y pour l'autre, et l'on obtient ainsi *zéro*. Il est clair que nous ne pourrions pas raisonner de la même manière en nous reportant à l'identité (4): c'est, au surplus, ce qui est exposé avec détails pages 199 et suivantes.

Dans l'identité (5) nous avons supposé que les fonctions sous les signes $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ étaient de la forme

$$\frac{\pi(x, y)}{z} \quad \text{et} \quad \frac{\pi_1(x, y)}{z}.$$

On aurait dû, d'une manière plus générale, les supposer de la forme

$$\frac{\pi(x, y)}{z} + \pi'(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\pi_1(x, y)}{z} + \pi'_1(x, y),$$

π' et π'_1 étant des polynomes en x, à coefficients rationnels en y, mais il est manifeste que l'identité

$$\frac{U(x, y)}{z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\pi(x, y)}{z} + \pi'(x, y)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\pi_1(x, y)}{z} + \pi'_1(x, y)\right]$$

entraîne nécessairement

$$\frac{\partial \pi'}{\partial x} + \frac{\partial \pi'_1}{\partial y} = 0.$$

On voit, par ce qui précède, la difficulté qui va se présenter, quand il s'agira d'évaluer *exactement* le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce. Nous verrons bientôt comment cette difficulté se rattache à une question très importante concernant les intégrales de différentielles totales de troisième espèce; c'est de l'étude de ces dernières intégrales que nous allons maintenant nous occuper.

CHAPITRE IX.

SUR LES INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES DE TROISIÈME ESPÈCE.

I. — Théorème fondamental sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce ([1]).

1. Considérons une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

n'ayant que des singularités ordinaires et n'occupant pas de position spéciale par rapport aux axes de coordonnées. Nous allons étudier les intégrales de différentielles totales de troisième espèce relatives à cette surface.

Si l'on envisage un certain nombre μ de courbes algébriques irréductibles sur la surface, il est possible qu'il n'existe pas d'intégrale de troisième espèce ayant seulement comme courbes logarithmiques ces μ lignes ou quelques-unes d'entre elles, mais nous allons montrer que cette circonstance ne se présentera pas si μ dépasse une certaine limite dépendant uniquement de la surface.

Une courbe C de la surface peut en général être définie par les deux équations

$$A(x, y) = 0$$
$$z = R(x, y),$$

A désignant un polynome irréductible, et R une fraction rationnelle de x et y; le cylindre

$$A(x, y) = 0$$

([1]) E. Picard, *Sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce dans la théorie des surfaces algébriques* (*Annales de l'École Normale*, 1901).

coupe la surface f suivant la courbe C et une ou plusieurs autres courbes. Celles-ci ne doivent pas être des courbes logarithmiques.

2. Considérons sur la surface f de degré m une courbe C de degré d définie par les deux équations précédentes. Envisageons la famille de courbes définie par la relation entre x et z

$$f(x, \bar{y}, z) = 0, \tag{1}$$

où y représente un paramètre arbitraire; on peut former une intégrale abélienne relative à cette courbe jouissant des propriétés suivantes : Elle n'a d'autre points singuliers à distance finie que les points (z, x) de la courbe correspondant aux équations

$$A(x, \bar{y}) = 0,$$
$$z = R(x, \bar{y}).$$

et la période polaire correspondant à chacun de ces points singuliers logarithmiques est égale à $+1$. De plus, relativement aux m points de la courbe à l'infini (pour lesquels les m développements sont distincts [1]), l'intégrale a seulement comme point singulier logarithmique l'un d'entre eux, et la période correspondante est égale à $-d$; enfin, elle est de la forme

$$\int S(x, \bar{y}, z)\, dx, \tag{I}$$

S étant une fonction rationnelle de x, y et z.

On se rend compte aisément qu'il est possible de satisfaire aux diverses conditions qui précèdent. On peut, par exemple, procéder de la manière suivante. Soient

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_d$$

les d points de la courbe C pour une valeur donnée de y, et désignons par M le point à l'infini de la courbe (1) qui doit être pour l'intégrale un point logarithmique.

Formons une intégrale de troisième espèce de la courbe

$$f(x, \bar{y}, z) = 0,$$

[1] On se reportera au Chapitre précédent (n° 9); les m développements de z suivant les puissances de x ont pour coefficients des polynomes en y.

ayant les points logarithmiques

$$M_i \quad \text{et} \quad M$$

avec les périodes polaires respectives

$$+1 \quad \text{et} \quad -1;$$

on peut s'arranger de manière que les coefficients de cette intégrale soient fonctions rationnelles de y et de (z_i, x_i). En faisant la somme de ces intégrales pour

$$i = 1, 2, \ldots, d,$$

on obtiendra une intégrale du type cherché I.

Ceci posé, si la courbe (1), entre x et z (pour y arbitraire), est de genre p, l'intégrale I a, outre les périodes polaires provenant des singularités logarithmiques, $2p$ périodes cycliques que nous désignerons par

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2p},$$

de telle sorte que l'ensemble des périodes de I est

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}, \quad 1. \tag{2}$$

Elles sont, sauf la dernière, des fonctions de y. Nous avons supposé que y avait une valeur fixe, d'ailleurs arbitraire. Si l'on fait varier y et qu'on revienne au point de départ, l'ensemble des périodes (2), pour un contour déterminé, se transformera en

$$\omega'_1, \quad \omega'_2, \quad \ldots, \quad \omega'_{2p}, \quad 1$$

et l'on aura la substitution S

$$(S) \qquad \begin{cases} \omega \;\; = m_1^1 \, \omega_1 + m_2^1 \, \omega_2 + \ldots + m_{2p}^1 \omega_{2p} + \mu^1, \\ \omega'_2 = m_1^2 \, \omega_1 + m_2^2 \, \omega_2 + \ldots + m_{2p}^2 \omega_{2p} + \mu^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{2p} = m_1^{2p} \omega_1 + m_2^{2p} \omega_2 + \ldots + m_{2p}^{2p} \omega_{2p} + \mu^{2p}, \\ 1 \;\; = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1, \end{cases}$$

les m et les μ étant des entiers. Les m des $2p$ premières colonnes ne dépendent nullement de la courbe C, c'est-à-dire du polynome A et de la fraction rationnelle R. Ils sont les mêmes que ceux que nous aurions obtenus si, au lieu de considérer l'inté-



grale I, nous avions pris l'intégrale de *seconde* espèce

$$(3) \qquad \int \frac{F(x, \bar{y}, z)\, dx}{f'_z}$$

relative à la courbe (1), comme nous l'avons fait, Tome I, page 94; les

$$m_1^i, \quad m_2^i, \quad \ldots, \quad m_{2p}^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p)$$

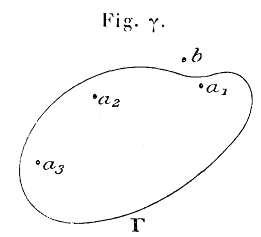
sont les mêmes que ceux de la substitution S de la page 99 (*loc. cit.*). Au contraire, les μ^i dépendent essentiellement de la courbe C.

Les points singuliers des ω considérés comme fonctions de y ne dépendent nullement de la courbe C; c'est là un point très important pour la suite. Ces points singuliers ne peuvent être, en effet, d'une part, que ceux correspondant aux valeurs de y pour lesquelles le genre de la courbe

$$(4) \qquad f(x, \bar{y}, z) = 0$$

s'abaisse, d'autre part, que ceux correspondant aux valeurs de y pour lesquelles un des points logarithmiques se confond avec un point critique de la courbe. Les premiers sont les points critiques de l'intégrale (3), les seconds ne sont pas en réalité des points critiques. Car, soient a_1, a_2, a_3, ..., les points critiques de la courbe (4), et b un point singulier logarithmique; b et les a dé-

Fig. 7.



pendent de y, et l'on suppose que, pour une certaine valeur α de y, le point b coïncide avec le point a_1. Soit ω une période correspondant à un contour Γ et enveloppant par exemple trois points a; à une petite courbe autour du point logarithmique b correspondra la période polaire $+1$. Quand y tourne autour de α et

revient à sa position initiale, il faut montrer que ω revient à la même valeur; ceci est immédiat, puisque la période $\omega + 1$, correspondant à un contour qui entoure les quatre points a_1, a_2, a_3 et b, ne change pas quand y tourne autour de α.

Les substitutions S, faisant connaître l'ensemble des valeurs des ω pour toutes les circulations de y autour des divers points critiques, sont donc en un certain nombre k indépendant de la courbe C.

3. Ces résultats obtenus, considérons maintenant $2p$ intégrales distinctes de seconde espèce I_1, I_2, ..., I_{2p} de la courbe

$$f(x, y, z) = 0,$$

en désignant par p le genre de cette courbe, pour y arbitraire. Soient aussi λ courbes C_1, C_2, ..., C_λ et formons λ intégrales

$$J_1, \quad J_2, \quad \ldots, \quad J_\lambda,$$

du type I, relatives respectivement aux courbes $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_\lambda$. Cherchons à déterminer, s'il est possible, les *fonctions rationnelles* de y

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p},$$

et les *constantes* c_1, c_2, ..., c_λ de telle sorte que l'intégrale abélienne, relative à la courbe (1)

$$a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_1 J_1 + \ldots + c_\lambda J_\lambda, \tag{5}$$

ait toutes ses périodes indépendantes de y.

Il en est bien ainsi pour les périodes polaires. Pour les périodes cycliques, il n'en sera pas ainsi, en général. Désignons par

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_{2p},$$

les périodes, supposées indépendantes de y, correspondant aux $2p$ cycles initiaux, pour lesquels nous avons les substitutions fondamentales, désignées d'une manière générale par S. Supposons que cette substitution S soit relative à la modification des périodes de J_1 pour une certaine circulation de y; avec la même circulation de y, on aura la même substitution pour J_2, ..., J_λ, sauf que les μ se trouveront remplacés par d'autres entiers ν, ..., π.



Dans ces conditions, on devra avoir, puisque l'on suppose que les K ne dépendent pas de y,

$$K_i = m_1^i K_1 + m_2^i K_2 + \ldots + m_{2p}^i K_{2p} + c_1 \mu^i + c_2 \nu^i + \ldots + c_\lambda \pi^i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

On aura $2p$ relations analogues pour chacune des k substitutions fondamentales du type S.

Ceci posé, admettons qu'on puisse trouver $2p + \lambda$ constantes

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_{2p}, \quad c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_\lambda,$$

non toutes nulles, et satisfaisant aux $2pk$ relations qui viennent d'être écrites : Nous allons montrer qu'*on pourra alors former une intégrale de différentielle totale ayant précisément les périodes précédentes.* C'est, comme on voit, la généralisation de l'analyse développée (t. I, p. 93), pour étudier les intégrales de différentielles totales de seconde espèce.

4. Écrivons, en effet, que les périodes de l'intégrale

$$a_1 I_1 + a_2 I_2 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_1 J_1 + \ldots + c_\lambda J_\lambda,$$

correspondant aux $2p$ cycles initiaux, sont égales aux constantes K_1, K_2, $\ldots$, K_{2p}. Nous aurons ainsi $2p$ équations qui vont déterminer

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p};$$

il faut montrer que les a ainsi déterminés sont des fonctions rationnelles de y. Désignons par E_1, E_2, $\ldots$, E_{2p} les premiers membres de ces équations, nous aurons

$$E_1 = K_1, \qquad E_2 = K_2, \qquad \ldots, \qquad E_{2p} = K_{2p};$$

il suffit de faire voir que ce système d'équations reste invariable quand on fait décrire à y un contour fermé quelconque, par exemple le contour auquel correspond la substitution S.

Or, ces équations deviennent

$$m_1^1 E_1 + m_2^1 E_2 + \ldots + m_{2p}^1 E_{2p} + c_1 \mu^{(1)} + c_2 \nu^{(1)} + \ldots + c_\lambda \pi^{(1)} = K_1,$$
$$m_1^2 E_1 + m_2^2 E_2 + \ldots + m_{2p}^2 E_{2p} + c_1 \mu^{(2)} + c_2 \nu^{(2)} + \ldots + c_\lambda \pi^{(2)} = K_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m_1^{2p} E_1 + m_2^{2p} E_2 + \ldots + m_{2p}^{2p} E_{2p} + c_1 \mu^{(2p)} + c_2 \nu^{(2p)} + \ldots + c_\lambda \pi^{(2p)} = K_{2p},$$

système équivalent au système

$$E_1 = K_1, \qquad E_2 = K_2, \qquad \ldots, \qquad E_{2p} = K_{2p},$$

d'après les équations que nous supposons vérifiées par les constantes K et c.

Nous avons donc obtenu une intégrale de troisième espèce, relative à la courbe entre x et z

$$f(x, \bar{y}, z) = 0,$$

dont les périodes cycliques et polaires

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_{2p}, \quad c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_\lambda,$$

sont indépendantes de y; désignons cette intégrale par

$$\int R(x, \bar{y}, z)\, dx.$$

5. Il va être facile maintenant de former une intégrale de différentielle totale de troisième espèce, relative à la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

ne pouvant avoir d'autre courbe logarithmique que les courbes

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_\lambda,$$

avec les périodes polaires correspondantes

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_\lambda,$$

et peut-être, en outre, la courbe à l'infini de la surface. On va voir, en effet, qu'on peut déterminer une fonction rationnelle $S(x, y, z)$ telle que l'intégrale

$$\int R(x, y, z)\, dx + S(x, y, z)\, dy$$

satisfasse à ces diverses conditions.

La fonction $S(x, y, z)$, considérée comme fonction de x et y, doit vérifier la condition

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

On y satisfera de la manière suivante : Soit x_0 une valeur fixe arbitraire et désignons par $z_1, z_2, \ldots, z_m$ les m racines de l'équation

$$f(x_0, y, z) = 0 \qquad (m \text{ étant le degré } f).$$

Posons

$$S = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{x_0, z_1}^{x, z} R(x, y, z)\, dx + \ldots + \int_{x_0, z_m}^{x, z} R(x, y, z)\, dx \right];$$

S, ainsi déterminée, a une valeur unique en chaque point (x, y, z) de la surface, *puisque les périodes des intégrales ne dépendent pas de y*. Par suite, cette expression sera une fonction rationnelle de (x, y, z), car les points singuliers de cette fonction ne peuvent être des points singuliers essentiels. De plus, on voit immédiatement que

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial y} [m R(x, y, z)] = \frac{\partial R}{\partial y},$$

comme il doit être.

Nous avons donc une intégrale de différentielle totale

$$\int R\, dx + S\, dy,$$

où R et S sont rationnelles en x, y et z.

L'intégrale précédente ne pourra visiblement avoir d'autres courbes logarithmiques que les courbes

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_\lambda,$$

la courbe à l'infini sur la surface, et peut-être aussi des sections planes de la surface correspondant à des plans

$$y = \text{const.}$$

Il serait aisé d'établir qu'il n'y a pas de lignes logarithmiques de cette dernière catégorie ; il suffirait, pour cela, de répéter le raisonnement fait pages 104 et 105 du Tome I, pour une circonstance analogue, mais il est inutile d'insister sur ce point, car si la section

$$y = b,$$

donnant dans la surface une courbe indécomposable (ce qu'on

peut toujours supposer, puisque les axes sont arbitraires), était une courbe logarithmique avec la période correspondante B, il suffirait de retrancher de notre intégrale

$$\frac{B}{2\pi i}\log(y-b)$$

pour avoir une intégrale possédant la propriété voulue.

En résumé, si les constantes K et c satisfont aux $2pk$ relations à coefficients entiers du n° 3, *nous pouvons former une intégrale de différentielle totale*

$$\int R\,dx + S\,dy$$

ayant les $2p+\lambda$ *périodes*

$$K_1,\quad K_2,\quad \ldots,\quad \ldots,\quad K_{2p},\quad c_1,\quad c_2,\quad \ldots,\quad c_\lambda,$$

les λ *dernières étant des périodes logarithmiques correspondant aux courbes données à l'avance*

$$C_1,\quad C_2,\quad \ldots,\quad C_\lambda.$$

Certaines quantités c peuvent être nulles, auquel cas il n'y aurait pas de courbe logarithmique correspondante. Si tous les c étaient nuls, nous aurions une intégrale qui ne pourrait avoir d'autre courbe logarithmique que la courbe à l'infini de la surface f; mais une intégrale ne pouvant avoir *une seule* courbe logarithmique, notre intégrale n'en aurait alors aucune, et nous aurions alors une intégrale de seconde espèce, conclusion qui est bien d'accord avec notre théorie des intégrales de seconde espèce.

6. Au point de vue des possibilités qui peuvent se présenter pour une surface donnée, quelques observations intéressantes sont à faire. Désignons, d'une manière générale, par *relations* (α) les $2pk$ relations du n° 3. Envisageons sur la surface une courbe algébrique irréductible *quelconque* C_1; il peut arriver, ou non, que les équations (α) correspondant à la seule courbe C_1 soient vérifiées pour une valeur de c_1 différente de zéro. Dans le premier cas, on aura une intégrale de troisième espèce ayant pour courbes logarithmiques la courbe C_1 et la courbe à l'infini; dans

le second cas, il n'y aura pas de telle intégrale. Si l'on est dans ce second cas, envisageons, outre C_1, une seconde courbe algébrique irréductible *quelconque* C_2, et concevons les équations (α) relatives aux deux courbes C_1 et C_2. Deux cas peuvent encore se présenter : il peut arriver ou non qu'on puisse satisfaire à ces équations, sans que c_2 soit nul. Dans le premier cas il y aura une intégrale de troisième espèce avec les deux courbes logarithmiques C_1 et C_2 et peut-être la courbe à l'infini ; il est visible que c_1 aussi ne sera pas nul. Dans le second cas, il n'y aura pas de telle intégrale. On peut ainsi continuer, mais non pas indéfiniment, car lorsque λ est assez grand, on pourra manifestement satisfaire aux équations (α), sans que tous les c soient nuls.

D'une manière plus précise, supposons que pour λ courbes

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots \quad C_\lambda,$$

il ne soit pas possible de satisfaire aux équations (α) sans que c_1, c_2, ..., c_λ soient nuls. Considérons une $\lambda+1^{\text{ième}}$ courbe *arbitraire* $C_{\lambda+1}$ de la surface et formons les équations (α) relatives à $C_1, C_2, \ldots, C_{\lambda+1}$; si λ est assez grand, il arrivera que ces dernières équations pourront être vérifiées sans que $c_{\lambda+1}$ soit nul. En effet, pour λ assez grand, les équations (α), dont le nombre $2pk$ ne dépend pas de λ, peuvent être vérifiées pour des valeurs des K et des c, les c n'étant pas tous nuls ; d'autre part, pour les équations (α) relatives à $C_1, C_2, \ldots, C_{\lambda+1}$ on ne peut avoir $c_{\lambda+1}=0$, car alors les équations (α) relatives à $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ pourraient être vérifiées, $c_1, c_2, \ldots, c_\lambda$ n'étant pas tous nuls. Nous aurons donc alors une intégrale de troisième espèce ayant certainement pour courbe logarithmique $C_{\lambda+1}$ et de plus quelqu'une ou la totalité des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ et de la courbe à l'infini.

Ceci nous conduit au théorème suivant :

On peut, sur une surface f, tracer λ courbes algébriques irréductibles particulières

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_\lambda$$

telles qu'il n'existe pas d'intégrales de différentielle totale de troisième espèce ayant seulement pour courbes logarithmiques une ou plusieurs de ces courbes C *et de la courbe à l'infini, mais*

telles que, si l'on envisage une $\lambda + 1^{\text{ième}}$ *courbe* arbitraire $C_{\lambda+1}$, *il existera une intégrale de troisième espèce ayant seulement pour courbes logarithmiques la courbe* $C_{\lambda+1}$ *et la totalité ou une partie des courbes* $C_1, \ldots, C_\lambda$ *et de la courbe à l'infini.*

Nous pouvons modifier l'énoncé, de manière à ne plus avoir à parler de la courbe à l'infini. Supposons que, pour $C_{\lambda+1}$ arbitraire, l'intégrale I dont il vient d'être question admette la courbe à l'infini comme courbe logarithmique. En prenant une autre courbe $C'_{\lambda+1}$, nous aurons une intégrale I', ayant pour courbe logarithmique $C'_{\lambda+1}$ et la totalité ou une partie des $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$, et de la courbe à l'infini; on peut évidemment choisir la constante A de manière que l'intégrale

$$I' - AI$$

n'ait pas la courbe à l'infini comme courbe logarithmique. Cette considération conduit au théorème fondamental que nous avions en vue.

Sur la surface f, à singularités ordinaires, on peut tracer ρ *courbes algébriques irréductibles particulières*

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_\rho$$

telles qu'il n'existe pas d'intégrale de différentielle totale de troisième espèce, ayant seulement pour courbes logarithmiques la totalité ou une partie de ces courbes C, *mais telles qu'il existe une intégrale ayant seulement pour courbes logarithmiques une* $\rho + 1^{\text{ième}}$ *courbe quelconque* Γ *de la surface, et la totalité ou une partie des courbes* C.

7. Les déductions du paragraphe précédent supposent que toutes les intégrales de différentielles totales peuvent être obtenues par des combinaisons analogues à celles du n° 3. On se rend compte aisément qu'il en est bien ainsi. Soit

$$\int R\,dx + S\,dy$$

une intégrale de troisième espèce ayant seulement pour courbes logarithmiques les lignes

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_\mu$$

de degrés $d_1, d_2, \ldots, d_\mu$ avec les périodes logarithmiques c_1, $c_2, \ldots, c_\mu$. On aura la relation

$$c_1 d_1 + c_2 d_2 + \ldots + c_\mu d_\mu = 0.$$

En désignant par

$$J_1, \quad J_2, \quad \ldots \quad J_\mu$$

les intégrales formées avec ces courbes comme au n° 3, la différence

$$\int R(x, y, z)\, dx - c_1 J_1 - \ldots - c_\mu J_\mu$$

est une intégrale de seconde espèce relative à la courbe

$$f(x, y, z) = 0;$$

elle est donc égale à une expression de la forme

$$a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p},$$

plus la dérivée par rapport à x d'une fonction rationnelle de x, y, z. Nous avons donc la forme envisagée au n° 3, et la démonstration du théorème fondamental est maintenant complète.

8. D'après sa nature même ρ est au moins égal à *un*. L'analyse que nous venons de développer pour établir l'existence de ce nombre en donne une limite supérieure mais ne donne pas le moyen de le calculer complètement. La recherche précise de ce nombre paraît, d'une manière générale, devoir être assez difficile, car elle est liée à l'étude des courbes algébriques tracées sur une surface donnée; c'est en ce point que notre étude n'est pas complète. Nous examinerons plus loin quelques exemples assez étendus.

Pour deux surfaces qui se correspondent birationnellement, le nombre ρ n'a pas nécessairement la même valeur. C'est seulement quand la correspondance entre les deux surfaces ne présente pas de points *fondamentaux* et de courbes *exceptionnelles* qu'on peut, d'une manière générale, affirmer l'invariance du nombre ρ; il est clair alors qu'à une courbe C de la surface S on peut faire correspondre une courbe C′ de la surface S′, et que le nombre des lignes est le même de part et d'autre. Il peut en être autrement quand il y a des courbes exceptionnelles, parce qu'à une courbe logarithmique C passant par un point fondamental peut corres-

pondre, outre la courbe C′, la courbe exceptionnelle transformée du point fondamental; il y a alors sur S′ deux courbes logarithmiques correspondant à la courbe logarithmique C de S. On le voit bien nettement de la manière suivante. Soit $x=0$, $y=0$ le point fondamental sur S; la transformation de S en S′ se trouve définie (p. 85 de ce Volume) par des équations de la forme

$$x = S(x', y'), \qquad y = S(x', y')\,P(x', y'),$$

la courbe $S(x', y') = 0$ correspondant sur S′ au point $x=0$, $y=0$. Soit sur cette courbe un point (α, β) pour lequel $P(\alpha, \beta)$ a la valeur m; nous pouvons supposer que S et P sont holomorphes autour de $x'=\alpha$, $y'=\beta$. La fonction

$$\log(y - mx)$$

se transforme en

$$\log S(x', y') + \log[P(x', y') - m];$$

elle a pour courbes logarithmiques les deux courbes

$$S(x', y') = 0 \qquad \text{et} \qquad P(x', y') - m = 0,$$

passant au point (α, β).

9. Faisons encore une remarque générale (¹). On sait qu'il y a dans la théorie des surfaces algébriques de nombreux problèmes où la présence de *courbes exceptionnelles* vient amener des complications; nous l'avons vu notamment dans ce Volume en étudiant les systèmes linéaires de courbes tracés sur les surfaces. Un théorème, récemment démontré par MM. Castelnuovo et Enriques (*Annali di Matematica*, t. VI, 3ᵉ série), est de grande importance : d'après ce théorème, *dans toute classe de surfaces se correspondant birationnellement il existe des surfaces sans courbes exceptionnelles* (²), en laissant de côté toutefois les classes qui comprennent des surfaces réglées.

Dans le problème qui nous occupe, le nombre ρ sera évidem-

(¹) E. Picard, *Sur la transformation des surfaces algébriques* (*Comptes rendus*, t. CXXXIV, 1902).

(²) Pour une telle surface Σ, la correspondance birationnelle entre Σ et une surface *quelconque* S de la classe se fait de telle manière qu'il n'y a pas de courbe de Σ correspondant à un point de S.



ment le même pour toutes les surfaces de la classe n'ayant pas de courbes exceptionnelles.

Le nombre ρ *relatif à ces surfaces sans courbes exceptionnelles est donc un nombre invariant* pour la classe de surfaces algébriques considérées.

II. — Sur les surfaces pour lesquelles toutes les intégrales de différentielles totales sont des combinaisons algébrico-logarithmiques [1].

10. Nous avons vu dans le Tome I que, pour une surface algébrique dont la connexion linéaire p_1 est égale à *un* (ce qui est le cas général), toutes les intégrales de différentielles totales de *seconde* espèce sont des fonctions rationnelles de x, y et z. La question se pose alors de savoir si, pour une telle surface, toute intégrale de différentielle totale ne serait pas une combinaison algébrico-logarithmique, c'est-à-dire une expression de la forme

$$(1) \qquad \Sigma A_k \log R_k(x, y, z) + P(x, y, z),$$

les R et P étant des fonctions rationnelles de x, y et z, et les A des constantes. En fait, les seuls exemples connus de surfaces ayant des intégrales qui ne soient pas de cette forme correspondent à $p_1 > 1$; mais, malheureusement, nous ne sommes pas en mesure de répondre à la question posée. Nous allons seulement démontrer une propriété curieuse *des surfaces dont toutes les intégrales de différentielles totales ont la forme précédente*.

11. Soit donc une surface f, pour laquelle *toutes* les intégrales de différentielles totales sont par hypothèse de la forme ci-dessus. Soient

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_\rho$$

les ρ courbes du théorème démontré dans la section précédente et Γ une courbe irréductible quelconque tracée sur la surface. Il existe, d'après ce théorème, une intégrale de différentielle totale

---

[1] E. Picard, *Sur quelques points fondamentaux dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Acta mathematica*, t. XXVI).

ayant pour courbes logarithmiques la courbe Γ et la totalité ou une partie des courbes C. Cette intégrale est de la forme (1); on peut supposer tout d'abord que les termes logarithmiques sont réduits à leur moindre nombre, c'est-à-dire qu'entre les A on n'a pas de relations

$$\Sigma m_k A_k = 0,$$

les m étant des entiers qui ne sont pas tous nuls. Il est clair en effet que, si l'on avait une telle relation, on pourrait réduire l'expression à avoir un terme de moins. Soit, pour fixer les idées, une relation entre trois coefficients A_1, A_2, A_3; on pourra écrire

$$A_3 = -\frac{m_1}{m_3} A_1 - \frac{m_2}{m_3} A_2.$$

On a donc

$$A_1 \log R_1 + A_2 \log R_2 + A_3 \log R_3 = A_1 \log\left(R_1 \frac{R_3^{m_3}}{R_3^{m_1}}\right) + A_2 \log\left(R_2 \frac{R_3^{m_3}}{R_3^{m_2}}\right),$$

et il y a, par suite, une réduction dans le nombre des logarithmes.

Les logarithmes ayant été ainsi réduits au moindre nombre, si l'intégrale se réduit à

$$\Sigma A_k \log R_k(x, y, z) + P(x, y, z),$$

on est assuré que les fonctions rationnelles R n'auront d'autres lignes de zéros et d'autres lignes d'infinis que les courbes C et la courbe Γ.

Si, en effet, une des fonctions R s'annulait le long d'une autre ligne λ, comme celle-ci n'est pas une courbe logarithmique de l'intégrale, il faudrait que d'autres fonctions rationnelles R (une au moins) devinssent nulles ou infinies le long de λ; et en écrivant que la ligne λ n'est pas une courbe logarithmique pour la somme, on obtiendrait une relation homogène et linéaire à coefficients entiers entre les A, contrairement à ce que nous avons supposé.

Une des fonctions R, au moins, est nulle ou infinie le long de Γ, et elle a comme autres lignes de zéros et d'infinis la totalité ou une partie des courbes C, avec des degrés quelconques d'ailleurs (entiers) de multiplicité. Ainsi, étant envisagées les courbes

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_\rho,$$

et une courbe irréductible arbitraire Γ, il existera certainement



une fonction rationnelle n'ayant d'autres lignes de zéros et d'infinis que la courbe Γ et la totalité ou une partie des courbes C. Ajoutons que cette fonction sera unique, ou, plus exactement, deux fonctions rationnelles R et R' possédant cette propriété sont telles que deux de leurs puissances entières convenables sont dans un rapport constant. Supposons, en effet, que R ait Γ pour ligne de zéros d'ordre μ, et que R' ait la même courbe pour ligne de zéros d'ordre μ', le quotient

$$\frac{R^{\mu'}}{R'^{\mu}}$$

ne pourra avoir d'autre ligne de zéros et d'infinis que $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$. Ce quotient se réduira à une constante, car autrement la fonction

$$\log \frac{R^{\mu'}}{R'^{\mu}}$$

pourrait être mise sous la forme d'une intégrale de différentielle totale de troisième espèce qui n'aurait pas de ligne logarithmique en dehors de $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$, ce qui est impossible d'après les propriétés de ces courbes C.

12. Ces points établis, prenons sur notre surface $\rho + 1$ courbes irréductibles entièrement arbitraires $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\rho+1}$. On peut, d'après ce qui précède, former une fonction rationnelle R_1 ayant pour ligne de zéros la courbe Γ_1 et pour lignes de zéros et d'infinis la totalité ou une partie des courbes C. Soient de même $R_2, \ldots, R_{\rho+1}$ des fonctions rationnelles correspondant à $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\rho+1}$; formons le produit

$$F = R_1^{\mu_1} R_2^{\mu_2} \ldots R_{\rho+1}^{\mu_{\rho+1}},$$

où les μ sont des entiers positifs ou négatifs. On peut choisir ces entiers (non tous nuls) de manière que, pour la fonction rationnelle F, les courbes C ne soient plus ni lignes d'infini ni lignes de zéros. La fonction F, ainsi obtenue, ne se réduira pas à une constante, et elle aura pour lignes de zéros et lignes d'infinis la totalité ou une partie des courbes Γ.

Nous sommes donc ainsi conduits à la conclusion suivante, qui est assez curieuse : étant prises sur la surface $\rho + 1$ courbes algébriques irréductibles arbitraires, *il existe une fonction rationnelle s'annulant le long de certaines de ces courbes et devenant*

infinie le long des autres (avec des degrés convenables de multiplicité) et n'ayant aucune autre ligne de zéros ou d'infinis.

Il est bien entendu qu'il s'agit ici d'une surface dont, par hypothèse, toutes les intégrales de différentielles totales se ramènent à des combinaisons algébrico-logarithmiques.

Pour les courbes algébriques il n'existe évidemment pas de proposition analogue, dans laquelle les *courbes* Γ seraient remplacées par des *points*; pour une courbe algébrique non unicursale on ne peut évidemment pas trouver une fonction rationnelle des coordonnées dont les pôles et les racines seraient compris parmi un certain nombre de points arbitrairement donnés, les degrés de multiplicité n'étant d'ailleurs pas fixés à l'avance.

13. Les résultats précédents conduiraient donc plutôt à penser que les intégrales de différentielles totales de troisième espèce ne se ramènent pas *en général* pour une surface algébrique à des combinaisons algébrico-logarithmiques, mais, comme nous l'avons dit plus haut, nous ne pouvons pas indiquer de surface, de connexion linéaire égale à l'unité (c'est-à-dire sans intégrale de différentielle totale de seconde espèce), possédant une intégrale de troisième espèce qui ne soit pas du type algébrico-logarithmique.

Indiquons seulement pour le moment un exemple d'une surface, dont toutes les intégrales de différentielles totales se réduisent à des logarithmes.

Il sera fourni par la surface célèbre du quatrième degré qui porte le nom de *Kummer*. M. Humbert a démontré, au sujet de cette surface, une proposition très élégante (¹) : toutes les courbes algébriques tracées sur cette surface sont de degré pair, et si $2m$ désigne le degré d'une telle courbe, on peut le long de cette courbe circonscrire à la surface une surface de degré m, ne la coupant pas en dehors de la courbe considérée. Ici le nombre ρ des énoncés précédents est égal à *un*; de plus, si l'on prend sur la surface *deux* courbes algébriques quelconques

$$\Gamma_1 \quad \text{et} \quad \Gamma_2,$$

(¹) G. Humbert, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (*Journal de Mathématiques*, 1893, p. 72).



il existera une intégrale de troisième espèce, ayant ces deux seules courbes logarithmiques, et réductible à un logarithme. Si, en effet,

$$f_1(x, y, z) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_2(x, y, z) = 0$$

représentent les deux surfaces de degrés m_1 et m_2 donnant les deux courbes d'après le théorème de M. Humbert, la fonction

$$\log \frac{f_1^{m_2}}{f_2^{m_1}}$$

peut être regardée comme une intégrale de troisième espèce possédant la propriété demandée.

III. — Quelques cas particuliers.

14. Les considérations générales développées plus haut, pour une surface n'ayant que des singularités ordinaires, s'appliquent avec des modifications peu importantes aux surfaces données par les équations de la forme

$$z^2 = f(x, y),$$

où f est un polynome en x et y.

Toute intégrale de différentielle totale relative à cette surface est, en dehors d'une intégrale de fonction rationnelle, de la forme

$$\int \frac{R\,dx + S\,dy}{M\sqrt{f(x, y)}},$$

R, S et M étant des polynomes en x et y. Des réductions simples (t. I, p. 168) permettent de la ramener à

$$\int \frac{R\,dx + S\,dy}{\chi(y)\,AB\ldots L\sqrt{f(x, y)}},$$

$\chi(y)$ étant un polynome en y, et A, B, ..., L des polynomes en x et y irréductibles et premiers avec $f(x, y)$.

De plus, la surface

$$A(x, y) = 0$$

coupe nécessairement la surface proposée

$$z^2 = f(x, y),$$

suivant *deux* courbes distinctes, c'est-à-dire qu'on peut trouver deux polynomes P et Q premiers entre eux et tels que

$$P^2 - Q^2 f(x, y)$$

soit divisible par $A(x, y)$. Les deux courbes sont alors

$$A(x, y) = 0, \qquad z = +\frac{P}{Q},$$
$$A(x, y) = 0, \qquad z = -\frac{P}{Q}.$$

Pour un polynome donné $f(x, y)$, l'étude complète des polynomes irréductibles $A(x, y)$ serait de grande importance. La remarque suivante va nous être utile :

Supposons qu'un polynome irréductible $\varphi(x, y)$ divise une expression

$$u^2 - v^2 f(x, y),$$

u et v étant deux polynomes en x et y, premiers avec φ, et désignons par m le degré de f. Alors, pour

$$\varphi(x, y) = 0,$$

on aura

$$\sqrt{f(x, y)} = \frac{u}{v} = R(x, y),$$

R étant rationnelle en x et y. Ceci posé, cherchons à déterminer des polynomes U et V en x, à coefficients rationnels en y, tels que

$$(\alpha) \qquad U - VR(x, y)$$

s'annule quand $\varphi(x, y) = 0$. Pour de tels polynomes, on a certainement le polynome en x

$$U^2 - V^2 f(x, y),$$

divisible par le polynome en x, $\varphi(x, y)$; la lettre y entre rationnellement dans les opérations. On pourrait prendre

$$U = u, \qquad V = v,$$

mais arrangeons-nous de façon que le quotient de $U^2 - V^2 f(x, y)$ par $\varphi(x, y)$ soit en x de degré le plus petit possible.

Si μ est le degré de φ, on peut s'arranger de façon que l'expres-

sion (α) s'annule pour $\varphi(x, y) = 0$, en faisant $V = 1$, et en prenant pour U un polynome en x de degré $\mu - 1$. Alors

$$U^2 - V^2 f(x, y)$$

sera un polynome de degré $2\mu - 2$ au plus, si

$$2\mu - 2 \geqq m,$$

et le quotient de $U^2 - V^2 f$ par φ sera de degré $\mu - 2$ au plus. Donc du polynome φ de degré μ, nous passons à un polynome $\varphi_1(x, y)$ de degré $\mu - 2$ au plus par rapport à x et à coefficients rationnels en y. De $\varphi_1(x, y)$ on passera à un polynome $\varphi_2(x, y)$ et ainsi de suite.

Il y a maintenant à distinguer suivant que m est pair ou impair.

Soit m impair. Si

$$2\mu - 2 = m + 1,$$

on pourra encore faire la réduction, et l'on arrivera à un polynome de degré

$$\mu - 2 = \frac{m - 1}{2}.$$

Si l'on a

$$2\mu - 2 = m + 3,$$

on obtient un polynome de degré

$$\mu - 2 = \frac{m + 1}{2}.$$

Mais on peut passer d'un polynome φ de degré $\frac{m+1}{2}$ à un polynome de degré $\frac{m-1}{2}$ au moyen du même raisonnement. On peut choisir un polynome U de degré $\frac{m-1}{2}$ de manière que

$$U^2 - f(x, y)$$

soit divisible par φ (division par rapport à x, bien entendu); le quotient est de degré

$$m - \frac{m + 1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{m - 1}{2}.$$

Donc, pour m impair, la réduction peut se faire jusqu'à ce que le polynome soit en x de degré $\frac{m-1}{2}$.

Soit m pair. Pour $2\mu - 2 = m$, nous ferons la réduction au degré

$$\mu - 2 = \frac{m}{2} - 1.$$

Pour $2\mu - 2 = m + 2$, nous ferons la réduction au degré

$$\mu - 2 = \frac{m}{2}.$$

Nous sommes donc ramenés au degré $\frac{m}{2}$ ou au degré $\frac{m}{2} - 1$, et il n'est pas possible ici de faire en général d'autre réduction.

Toutefois il est possible de passer du premier cas au second si, dans $f(x,y)$, le coefficient de x est un carré parfait que l'on peut supposer être l'unité. Supposons en effet que, pour x satisfaisant à l'équation

$$x^{\frac{m}{2}} + \alpha_1 x^{\frac{m}{2}-1} + \ldots + \alpha_{\frac{m}{2}} = 0 \quad (\text{les } \alpha \text{ étant rationnels en } y),$$

le radical $\sqrt{f(x,y)}$ se mette sous la forme d'une fraction rationnelle en x et y. On pourra choisir les A rationnels en y de manière que

$$\left(x^{\frac{m}{2}} + A_1 x^{\frac{m}{2}-1} + \ldots + A_{\frac{m}{2}}\right)^2 - f(x,y)$$

s'annule pour les $\frac{m}{2}$ racines de l'équation précédente. Le quotient de cette expression par

$$x^{\frac{m}{2}} + \alpha_1 x^{\frac{m}{2}-1} + \ldots + \alpha_{\frac{m}{2}}$$

sera donc [dans $f(x,y)$ le coefficient de x^m est l'unité] un polynome de degré

$$\frac{m}{2} - 1 \text{ au plus,}$$

ce qui réalise la réduction cherchée.

15. Ces préliminaires posés, soit l'identité

$$U^2 - V^2 f(x,y) = \varphi.\psi,$$

U, V, φ et ψ étant des polynomes en x à coefficients rationnels

en y, l'expression

$$(\beta) \qquad A \log \frac{U - V\sqrt{f}}{U + V\sqrt{f}} \qquad (A = \text{const.})$$

n'aura, à distance finie, d'autres courbes logarithmiques que des courbes de la forme

$$y = \text{const.},$$

et les courbes

$$\varphi = 0, \qquad z = \pm \frac{U}{V};$$

$$\psi = 0, \qquad z = \pm \frac{U}{V}.$$

Si donc une intégrale de troisième espèce a pour courbes logarithmiques les deux lignes

$$(\gamma) \qquad \varphi = 0, \qquad z = \pm \frac{U}{V},$$

quand on en retranchera l'expression (β) avec une valeur convenable de A, on fera disparaître les courbes logarithmiques (γ) pour les remplacer par les courbes logarithmiques

$$\psi = 0, \qquad z = \pm \frac{U}{V}.$$

Une conséquence importante se déduit immédiatement de ce résultat. *Si, pour le polynome donné $f(x, y)$, que nous supposerons, pour fixer les idées, de degré impair m en x, il n'est pas possible de trouver un polynome en x irréductible*

$$\psi(x, y),$$

avec coefficients rationnels en y et de degré $\frac{m-1}{2}$ au plus, tel que, pour

$$\psi(x, y) = 0,$$

$\sqrt{f(x, y)}$ soit susceptible de se mettre sous la forme d'une fonction rationnelle en x et y, on pourra, par la soustraction d'un certain nombre de logarithmes, faire disparaître d'une intégrale de différentielle totale toutes les courbes logarithmiques à distance finie, à l'exception de courbes

$$y = \text{const.}$$

s'il peut y en avoir.

De plus, par des raisonnements analogues à ceux que nous avons employés dans la section précédente pour la démonstration du théorème fondamental, on est conduit à la conclusion suivante :

S'il existe des polynomes ψ_i répondant à la condition précédente, on pourra trouver un nombre ρ tel qu'il n'y aura pas d'intégrale de différentielle totale de troisième espèce ayant seulement, pour courbes logarithmiques à distance finie la totalité ou une partie des couples de courbes répondant aux ρ polynomes

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_\rho,$$

mais tel qu'il existera une intégrale ayant seulement pour courbes logarithmiques le couple de courbes correspondant à

$$\psi_n \qquad (n > \rho)$$

et la totalité ou une partie des couples de courbes correspondant à $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\rho$.

Nous ne parlons pas dans cet énoncé de courbes logarithmiques qui correspondraient à $y = \text{const.}$, qui ne sont pas exclues.

Dans cet énoncé, le nombre ρ pourrait être nul, c'est-à-dire qu'il pourrait arriver dans certains cas qu'à tout couple de courbes répondant à ψ_i correspondît une intégrale.

16. On voit, étant donnée l'équation

$$z^2 = f(x, y),$$

l'importance des relations

$$\psi(x, y) = 0,$$

telles que, au moyen de ces relations, z soit susceptible de se mettre sous la forme d'un polynome en x et y.

Le cas le plus simple est évidemment celui de $m = 3$. On a alors l'équation

$$z^2 = a(y)x^3 + b(y)x^2 + c(y)x + d(y),$$

a, b, c, d étant des polynomes en y. Il s'agirait de rechercher s'il existe des fonctions rationnelles z et x de y, satisfaisant à l'équation précédente.



La question est beaucoup plus complexe qu'elle ne le semble au premier abord; c'est ce que montrera de suite un cas très simple ([1]). Je suppose que la relation se réduise à

$$z^2 = f(x)\,F(y),$$

f étant un polynome de troisième degré en x n'ayant que des racines simples, et $F(y)$ un polynome de degré $2p+1$ sans racines multiples. Nous allons montrer qu'il n'existe pas en général de fractions rationnelles z et x de y satisfaisant à l'équation précédente, sauf les solutions immédiates

$$z = 0, \qquad x = a,$$

a étant une racine de $f(x) = 0$. Supposons qu'il existe d'autres solutions; on aura

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dx}{dy}\,\frac{F(y)}{z}\,\frac{dy}{\sqrt{F(y)}}.$$

De là on déduit que l'intégrale de première espèce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

se transforme, en prenant pour x une fonction rationnelle de y, en l'intégrale

$$\int R(y)\,\frac{dy}{\sqrt{F(y)}},$$

$R(y)$ étant rationnelle en y. Comme cette intégrale doit être aussi de première espèce, il faut que $R(y)$ se réduise à un polynome de degré $p-1$, et, par suite, une fonction rationnelle x de y répondant à la question doit satisfaire à la relation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = P(y)\,\frac{dy}{\sqrt{F(y)}},$$

$P(y)$ étant un polynome de degré $p-1$ au plus. Réciproque-

([1]) E. Picard, *Sur la résolution de certaines équations à deux variables et sur un théorème de M. Nœther* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1901). — *Sur certaines surfaces dont toutes les intégrales différentielles totales se ramènent à des combinaisons algébrico-logarithmiques* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1903).

ment d'ailleurs, si une fonction rationnelle x de y satisfait à une telle relation, on aura

$$\sqrt{f(x)\,\mathrm{F}(y)} = \mathrm{F}(y)\,\frac{\frac{dx}{dy}}{\mathrm{P}(y)},$$

et, par suite, z sera rationnelle en y.

Des considérations précédentes il résulte tout d'abord que, pour un polynome donné du troisième degré, si le polynome $\mathrm{F}(y)$ est arbitraire, il ne sera pas possible de déterminer une fonction rationnelle x de y (ne se réduisant pas à une constante) satisfaisant aux conditions voulues. En effet, il ne sera pas possible de trouver une intégrale de première espèce relative au radical $\sqrt{\mathrm{F}(y)}$ ayant seulement pour périodes les deux périodes de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Par suite, en général, pour la surface

$$z^2 = f(x)\,\mathrm{F}(y),$$

[$f(x)$ *étant du troisième degré, et* $\mathrm{F}(y)$ *de degré* $2p+1$], *toutes les intégrales de différentielles totales se ramèneront à la forme*

$$\int \frac{\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy}{\sqrt{f(x)\,\mathrm{F}(y)}},$$

où P *et* Q *sont des polynomes en* x, *à coefficients rationnels en* y. D'ailleurs, en retranchant de l'intégrale une fonction rationnelle convenable en x, y et z, on peut supposer que P est de la forme

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B},$$

A et B étant des fonctions rationnelles de y. Alors les périodes de l'intégrale relative à x

$$\int \frac{(\mathrm{A}x + \mathrm{B})\,dx}{\sqrt{f(x)\,\mathrm{F}(y)}}$$

ne doivent pas dépendre de y. Or il est aisé de voir que l'on ne peut choisir des fonctions rationnelles A et B de y (sauf $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 0$) telles que les périodes de cette intégrale satisfassent à la condition

indiquée. Soient, en effet, les deux intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \quad \text{et} \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}},$$

dont nous désignerons par ω_1, Ω_1 et ω_2, Ω_2 les périodes correspondantes. On devra avoir

$$\frac{A\,\Omega_1 + B\,\omega_1}{\sqrt{F(y)}} = C_1,$$

$$\frac{A\,\Omega_2 + B\,\omega_2}{\sqrt{F(y)}} = C_2,$$

C_1 et C_2 étant des constantes; or les valeurs de A et B ainsi déterminées ne sont évidemment pas fonctions rationnelles de y.

17. Nous concluons, de l'étude du paragraphe précédent, que *les intégrales de différentielles totales relatives à la surface*

$$z^2 = f(x)\,F(y)$$

se ramènent toutes en général à des combinaisons algébrico-logarithmiques.

Il y a un cas particulier, où nous ne sommes pas assurés de cette conclusion, c'est celui où l'on peut trouver un polynome $P(y)$ de degré $p - 1$, de telle sorte que l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = P(y)\,\frac{dy}{\sqrt{F(y)}}$$

soit susceptible d'être vérifiée par une fonction rationnelle x de y (ne se réduisant pas à une constante).

Approfondissons le cas où le polynome $F(y)$ se réduirait à $f(y)$; alors $P(y)$ doit être une constante C (puisque $p = 1$), et nous avons l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = C\,\frac{dy}{\sqrt{f(y)}} \qquad \text{(C étant une constante).}$$

Cette équation se rencontre dans la théorie de la multiplication des fonctions elliptiques. Supposons que les fonctions elliptiques correspondant au polynome du troisième degré $f(x)$ *n'admettent*

pas la multiplication complexe; alors C sera nécessairement un nombre entier réel m, et si, avec les notations de Weierstrass, on pose

$$f(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

et que $p(u)$ désigne la fonction elliptique correspondante, on aura d'abord la solution

$$y = p(u), \qquad x = p(mu);$$

x ainsi obtenue est une fonction rationnelle de y.

On a en outre

$$z = \pm\sqrt{f(x)f(y)} = \pm \frac{f(y)}{m}\frac{dx}{dy},$$

qui est bien rationnelle en y. Nous désignerons par $R_m(y)$ l'expression de x en fonction de y; on a évidemment

$$R_1(y) = y.$$

L'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = m\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$$

admettra d'autres solutions x fonctions rationnelles de y; il est facile de trouver leur expressi on générale. Si l'on pose

$$x = p(v), \qquad y = p(u),$$

l'équation précédente devient

$$dv = m\,du,$$

d'où

$$v = mu + K \qquad (\text{K étant une constante.})$$

Or, comment doit être choisie la constante K pour que de

$$x = p(mu + K), \qquad y = p(u),$$

on tire pour x une fonction rationnelle de y. Il faut et il suffit que

$$mu + K \quad \text{et} \quad -mu + K$$

donnent pour x la même valeur, quel que soit u. Ceci exige que

$$K = \frac{\nu\omega + \nu'\omega'}{2},$$

ν et ν' étant des entiers, ω et ω' étant les périodes de $p(u)$. Nous aurons donc pour K *quatre* valeurs conduisant à des fonctions rationnelles distinctes; le cas de $\nu = \nu' = 0$ est celui qui a été considéré ci-dessus.

Nous allons étudier la disposition sur la surface des différents couples de courbes correspondant aux diverses fonctions rationnelles x de y, que nous venons de trouver.

Prenons d'abord la première série ($\nu = \nu' = 0$).

18. Pour *la courbe du troisième degré* entre z et x

$$z^2 = f(x)f(y),$$

on a la représentation paramétrique (avec le paramètre v)

$$x = p(v), \qquad z = p'(v)p'(u).$$

Si l'on coupe la courbe par une droite quelconque, la somme des valeurs des v correspondant aux points de rencontre est égale à *zéro* à un multiple près des périodes.

Les valeurs $v = \pm u$ correspondent à $x = y$, et les valeurs $v = \pm mu$ correspondent à la fraction rationnelle x de y, dont nous avons parlé plus haut. On obtient ainsi, sur la courbe précédente, une succession de points; il est facile d'obtenir pour ces points une génération géométrique, qui va nous être très utile.

Si l'on mène la tangente au point A correspondant à

$$x = y, \qquad z = f(y),$$

elle rencontre la courbe en un troisième point B pour lequel on a

$$v = -2u;$$

le symétrique B' de B par rapport à Ox correspond à

$$v = 2u.$$

En joignant le point A au point B', le troisième point C d'intersection de la droite AB' avec la courbe correspond à

$$v = -3u.$$

Prenons le symétrique C' de C par rapport à Ox, pour lequel

$v = 3u$; la droite AC′ donne un troisième point pour lequel

$$v = -4u,$$

et, ainsi de suite, on obtiendra tous les points correspondant à $v = \pm mu$.

Considérons les deux points correspondant à u et $-mu$, la droite qui les joint coupe encore la courbe au point correspondant à $(m-1)u$. Soit

$$z = ax + b,$$

l'équation de cette droite, où a et b sont manifestement des fonctions rationnelles de y.

Le polynome du troisième degré en x

$$(ax+b)^2 - f(x)f(y)$$

aura pour racines

$$R_1(y), \quad R_{m-1}(y) \quad \text{et} \quad R_m(y).$$

Si donc nous revenons à la surface

$$z^2 = f(x)f(y),$$

l'expression

$$(\alpha) \qquad A \log \frac{ax+b+z}{ax+b-z}, \quad \text{(A étant une constante)}$$

aura, comme courbes logarithmiques, les trois couples de courbes

$$z = \pm(ax+b), \qquad x = R_k(y),$$

où k a les trois valeurs 1, $m-1$ et m.

Donc si une intégrale de différentielle totale admet le couple de courbes logarithmiques correspondant à $k = m$, on pourra, par la soustraction de l'expression (α) avec une valeur convenable de la constante A, faire disparaître ce couple de courbes et le remplacer par les couples de courbes correspondant à $k = 1$ et $k = m-1$. En allant ainsi, de proche en proche, on arrivera à n'avoir plus, comme courbes logarithmiques, que les couples de courbes correspondant à

$$k = 1 \quad \text{et} \quad k = 2;$$

mais, pour ce dernier cas, on peut, d'après la construction in-



diquée plus haut, déterminer a et b rationnelles en y, de telle sorte que

$$(ax+b)^2 - f(x)f(y)$$

admette $R_1(y)$ comme racine double, et $R_2(y)$ comme racine simple, et alors $k=2$ est ramené à $k=1$.

19. Nous n'avons encore considéré que la première série de couples de courbes, celle qui correspond à

$$v = \pm mu.$$

L'étude des trois autres séries sera très facile. Prenons par exemple la série correspondant à

$$v = \pm mu + \frac{\omega}{2},$$

et désignons par

$$x = \rho_m(y)$$

la fonction rationnelle correspondante.

Considérons, comme plus haut, sur la courbe entre z et x

$$z^2 = f(x)\,p'^2(u).$$

Le point A correspondant à

$$v = mu + \frac{\omega}{2},$$

les coordonnées de A sont

$$x = p\left(mu + \frac{\omega}{2}\right), \qquad z = p'\left(mu + \frac{\omega}{2}\right)p'(u).$$

Envisageons aussi le point B correspondant à $v = \frac{\omega}{2}$. Ses coordonnées sont

$$x = \alpha, \qquad z = 0 \quad (\alpha \text{ étant une racine de } f).$$

La droite joignant A et B rencontre la courbe en un troisième point correspondant à

$$v = -mu.$$

Désignons par

$$z = ax + b$$

la droite joignant ces points (a et b sont rationnels en y). L'équa-

tion du troisième degré en x

$$(ax+b)^2 - f(x)f(y) = 0$$

admettra, pour racines α, $\rho_m(y)$ et $R_m(y)$. Si donc on revient à la surface

$$z^2 = f(x)f(y),$$

l'expression

$$\log \frac{ax+b+z}{ax+b-z}$$

admettra, comme courbes logarithmiques, les deux couples de courbes correspondant à

$$x = \rho_m(y) \quad \text{et} \quad x = R_m(y).$$

On peut donc, par une soustraction convenable, ramener le premier couple de courbes logarithmiques au second. Mais les couples de ce type viennent d'être étudiés, et nous avons vu que l'on pouvait se borner à envisager les couples de courbes correspondant à $x = y$.

Finalement, *toute intégrale de différentielle totale relative à la surface*

$$z^2 = f(x)f(y)$$

et de la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{z},$$

où P *et* Q *sont rationnelles en* x *et* y, *peut, par la soustraction d'expressions algébrico-logarithmiques convenables, être ramenée à n'avoir à distance finie d'autres courbes logarithmiques que le couple de courbes correspondant à*

$$x = y.$$

Nous ne parlons pas des courbes correspondantes à $x = \alpha$ [où α serait nécessairement racine de $f(x)$], qui ne peuvent être des courbes logarithmiques pour les intégrales envisagées.

L'intégrale sera donc de la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{(x-y)^m \sqrt{f(x)f(y)}},$$

P et Q étant des polynomes en x, à coefficients rationnels en y.

Enfin des réductions tout élémentaires permettent de ramener cette intégrale au cas de $m = 1$.

20. Or il est aisé de voir qu'il ne peut y avoir, pour la surface

$$z^2 = f(x) f(y),$$

d'intégrale de différentielle totale de la forme

$$\int \frac{P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy}{(x-y)\,z},$$

où P et Q sont des polynomes en x, à coefficients rationnels en y. Avant de le démontrer directement montrons que cela résulte indirectement des remarques faites dans le Chapitre précédent au sujet de l'identité étudiée précédemment (p. 199),

$$(1) \qquad \frac{U(x, y)}{\sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sqrt{f(x)}}{(y-x)\sqrt{f(y)}}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sqrt{f(y)}}{(x-y)\sqrt{f(x)}}\right].$$

S'il existait une intégrale de la forme indiquée, on aurait nécessairement

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{Q(x, y)}{(x-y)z}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{P(x, y)}{(x-y)z}\right] = 0.$$

D'ailleurs, on a évidemment

$$\frac{P(y, y)}{f(y)} = C \quad \text{(C étant une constante).}$$

Si donc de (1) on retranche l'identité (2) multipliée par C, on obtiendra une identité de la forme

$$\frac{U(x, y)}{\sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{P_1(x, y)}{z}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{Q_1(x, y)}{z}\right],$$

où P_1 et Q_1 sont des *polynomes* en x, et cette identité est impossible, car l'intégrale double

$$\iint \frac{U(x, y)}{z}\,dx\,dy,$$

prise le long du continuum envisagé (*loc. cit.*), serait nulle, ce qui est inexact.

21. Démontrons maintenant directement qu'il ne peut y avoir, pour notre surface, d'intégrale de la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{(x-y)\sqrt{f(x)f(y)}}.$$

Les périodes de l'intégrale relative à x

$$\int \frac{P(x,y)\,dx}{(x-y)\sqrt{f(x)f(y)}}$$

ne doivent pas dépendre du paramètre y. En particulier, l'expression

$$\frac{P(x,x)}{f(x)}$$

doit se réduire à une constante; cette constante est différente de zéro, sinon les deux lignes correspondant à $x=y$ ne seraient pas des courbes logarithmiques, et nous serions dans le cas étudié plus haut. On peut supposer que la constante est égale à *un*.

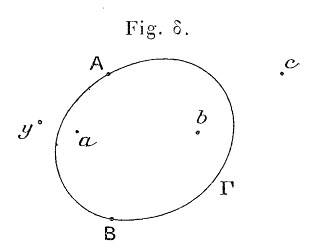
Si l'on considère d'une manière générale l'intégrale ci-dessus, P étant de la forme indiquée, et avec la condition

$$P(x,x) = f(x),$$

les périodes cycliques de cette intégrale sont des fonctions de y, la période polaire étant $2\pi i$. Les points singuliers de ces périodes regardées comme fonctions de y sont les trois racines de $f(y)$ et le point à l'infini.

Envisageons dans le plan de la variable x le cycle Γ comprenant à son intérieur deux des racines a et b, et laissant y à son extérieur, et supposons y voisin de a.

Fig. 8.

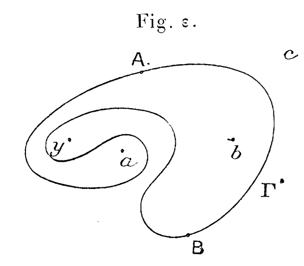


Nous avons pour une détermination de $\sqrt{f(x)}$ en un point A du contour (*fig.* 8), et pour une détermination de $\sqrt{f(y)}$, une

période déterminée ω. Supposons, pour fixer les idées, que la détermination de $\sqrt{f(x)}$ en A soit celle qui devient $\sqrt{f(y)}$, quand x va de A en y par un chemin rectiligne. Faisons maintenant décrire à y un chemin fermé autour de a. Le cycle Γ va se déformer, fuyant en quelque sorte devant y, et nous aurons, quand y sera revenu à sa position initiale, une nouvelle position Γ' du cycle Γ correspondant à la seconde figure où l'on a supposé, comme il est permis, que seulement la portion de Γ comprise entre le point A et un autre point B s'est modifiée.

Au point de départ A (*fig.* ε), le signe de $\sqrt{f(y)}$ n'est pas le même dans les deux cas, puisque y a tourné autour de a; les éléments de l'intégrale ont donc des signes différents au départ.

Fig. ε.



Il est alors aisé de voir ce que devient ω, quand y a tourné autour de a; on reconnaît de suite, en comparant les deux figures, que

$$\omega \quad \text{se transforme en} \quad -\omega - 4\pi i.$$

Faisons maintenant décrire à y un autre chemin enveloppant les trois points a, b, c. Quand y revient à son point de départ, le radical $\sqrt{f(y)}$ a changé de signe, rien par ailleurs n'étant modifié; par suite

$$\omega \quad \text{se transforme en} \quad -\omega.$$

Or ω doit rester invariable, puisqu'il est indépendant de y; on a donc

$$\omega = 0.$$

D'autre part, la circulation de y autour de a changeant ω en $-\omega - 4\pi i$, on voit que l'on arrive à un résultat absurde. Nous en concluons que l'intégrale, dont nous avons supposé l'existence, ne saurait exister. Donc *toutes les intégrales de différentielles*

totales relatives à la surface

$$z^2 = f(x) f(y)$$

s'expriment par des combinaisons algébrico-logarithmiques.

On a seulement supposé que les fonctions elliptiques correspondant au polynome $f(x)$ n'admettent pas de multiplication complexe.

22. Relativement à cette dernière circonstance, faisons seulement l'étude d'un cas particulier ; des considérations analogues s'appliqueraient à tous les cas de multiplication complexe. Soit

$$f(x) = 4x^3 - 1\,;$$

l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = C\,\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$$

ne pourra être vérifiée par une fonction rationnelle x de y, que si

$$C = m + n\varepsilon$$

(ε racine cubique imaginaire de l'unité).

Les fonctions rationnelles x de y se déduisent, en raisonnant comme plus haut, des équations

$$y = p(u), \qquad x = p[(m + n\varepsilon)u + K],$$

où K est une demi-période.

A ces fractions rationnelles peuvent correspondre des couples de courbes logarithmiques pour les intégrales de différentielles totales considérées. On verrait, comme ci-dessus, que l'on peut se borner à $K = 0$, et considérer par suite les fractions rationnelles x de y correspondant à

$$y = p(u), \qquad x = p[(m + n\varepsilon)u].$$

En particulier, pour $m = 1$, $n = 0$, on a la solution déjà considérée $x = y$; et, pour $m = 0$, $n = 1$, on a $x = \varepsilon y$.

On va voir que tous les couples de courbes logarithmiques peuvent être ramenés aux deux couples de courbes correspondant à

$$x = y \quad \text{et} \quad x = \varepsilon y.$$

Tout d'abord le raisonnement fait plus haut, pour montrer que tous les couples de courbes correspondant à

$$y = \mathfrak{p}(u), \qquad x = \mathfrak{p}(mu)$$

se ramènent à $x = y$, est encore applicable.

On verra pareillement que tous les couples de courbes correspondant à

$$y = \mathfrak{p}(u), \qquad x = \mathfrak{p}(n\varepsilon u)$$

se ramènent au cas de $n = 1$, c'est-à-dire à $x = \varepsilon y$.

Soit enfin le cas général correspondant à

$$y = \mathfrak{p}(u), \qquad x = \mathfrak{p}(v), \qquad \text{où } v = (m + n\varepsilon)u.$$

Nous considérons sur la courbe entre z et x

$$z^2 = f(x)\,\mathfrak{p}'^2(u)$$

le point

$$x = \mathfrak{p}(v), \qquad z = \mathfrak{p}'(v)\,\mathfrak{p}'(u) \qquad [v = (m + n\varepsilon)u].$$

Il est en ligne droite avec les deux points ayant les coordonnées

$$x = \mathfrak{p}(mu), \qquad z = \mathfrak{p}'(-mu)\,\mathfrak{p}'(u),$$
$$x = \mathfrak{p}(n\varepsilon u), \qquad z = \mathfrak{p}'(-n\varepsilon u)\,\mathfrak{p}'(u),$$

puisque la somme des arguments

$$(m + n\varepsilon)u, \qquad -mu, \qquad -n\varepsilon u$$

correspondant à ces trois points est nulle. Soit

$$z = ax + b$$

l'équation de la droite joignant ces trois points, où a et b sont des fonctions rationnelles de y. Alors, en revenant à la surface

$$z^2 = f(x) f(y),$$

l'expression

$$\log \frac{ax + b - z}{ax + b + z}$$

permet de ramener le couple de courbes logarithmiques correspondant à

$$v = (m + n\varepsilon)u$$

aux couples qui correspondent à

$$v = mu \quad \text{et} \quad v = n\varepsilon u.$$

C'est toujours le même mode de raisonnement, et, finalement, nous sommes ramené aux deux couples relatifs à

$$x = y \quad \text{et} \quad x = \varepsilon y.$$

23. Par suite, dans notre exemple actuel, on voit immédiatement que l'on peut se borner à envisager les intégrales de différentielles totales de la forme

$$\int \frac{\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy}{(x-y)(x-\varepsilon y)\sqrt{f(x)f(y)}},$$

P et Q étant des polynomes en x à coefficients rationnels en y.

L'intégrale diffère de celle que nous avons étudiée au § 21 par la présence au dénominateur du facteur $x - \varepsilon y$. Mais les raisonnements faits (*loc. cit.*) vont encore être applicables avec peu de modifications, et nous arriverons à la même conclusion, à savoir que toutes les intégrales relatives à la surface

$$z^2 = (4x^3 - 1)(4y^3 - 1)$$

se ramènent encore à des combinaisons algébrico-logarithmiques.

Reportons-nous en effet à la figure faite plus haut; a, b, c représentent les trois racines de $4x^3 - 1$. Il faudrait encore marquer le point correspondant à $y\varepsilon$. Si y est voisin de a, le point $y\varepsilon$ sera voisin de l'un des deux autres points. Supposons qu'il soit voisin de c. Toutes les parties du raisonnement fait au § 21 sont encore applicables, puisque le point $y\varepsilon$ restant voisin de c n'amène aucune modification dans Γ, quand y tourne autour de a. On arrive donc encore à une contradiction, et, par suite, l'intégrale dont nous avons admis l'existence ne peut être construite, et les seules intégrales sont des combinaisons algébrico-logarithmiques.

24. Examinons quelques autres cas. Soit la surface

$$z^2 = a(y)x^3 + b(y),$$

où a et b sont des polynomes en y. Il n'y a pas *en général* de

fonctions rationnelles z et x de y satisfaisant à cette relation. Admettons en effet qu'il en soit autrement et posons

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,X,$$
$$z = \sqrt{b}\,Z;$$

on aura

$$(3)\qquad Z^2 = X^3 + 1.$$

X et Z sont visiblement des fonctions rationnelles de y et de θ, ne se réduisant pas à des constantes, en posant

$$(4)\qquad \theta^6 = b a^2.$$

L'intégrale de première espèce

$$\int \frac{dX}{Z}$$

de la courbe (3) doit donc se transformer en une intégrale de première espèce de la courbe (4). Or a et b étant des polynomes arbitraires, il n'y a pas d'intégrale de première espèce de la courbe (4) *n'ayant que deux périodes;* l'hypothèse faite est donc inadmissible. Ce mode de raisonnement permettrait même, en approfondissant davantage, de reconnaître dans quels cas il serait possible de trouver x et z rationnelles en y et satisfaisant à l'équation de la surface.

23. Du cas particulier précédent on conclut que, *en général,* on ne peut satisfaire à l'équation

$$(4)\qquad z^2 = a(y)\,x^3 + b(y)\,x^2 + c(y)\,x + d(y)$$

(où a, b, c, d sont des polynomes arbitraires en y) en prenant pour z et x des fractions rationnelles de y. On exclut, bien entendu, ici comme plus haut, le cas de x et z identiquement infinies. Comme, en général, une telle surface n'a pas d'intégrales de différentielles totales de seconde espèce non rationnelles, on arrive à la même conclusion que plus haut pour toutes les intégrales de différentielles totales de cette surface.

A la vérité, l'étude complète des cas où l'on peut satisfaire à

l'équation (4) par des fonctions rationnelles x et z de y ne semble pas facile. A cet égard, le calcul des nombres des constantes indéterminées se présentant dans le problème n'est pas sans intérêt. On ne diminue pas la généralité en supposant que a, b, c, d sont des polynomes de degré pair $2m$ en y. Soit, de plus,

$$x = \frac{u}{v},$$

u et v étant des polynomes de degré μ en y. On devra pouvoir choisir ces polynomes de manière que le produit

$$[a(y)u^3 + b(y)u^2v + c(y)uv^2 + d(y)v^3]v$$

soit un carré parfait. Comme le polynome précédent est de degré $2m + 4\mu$, on aura

$$m + 2\mu,$$

conditions à écrire. Or le nombre des constantes figurant dans u et v (d'une manière non homogène) est

$$2\mu + 1.$$

L'inégalité

$$2\mu + 1 < 2\mu + m$$

montre qu'en général le problème est impossible.

En général, la surface (4) sera de *genre géométrique* supérieur à *zéro,* et les fonctions rationnelles x et z de y, qui pourraient satisfaire à la relation (4), ne dépendront pas alors d'un paramètre arbitraire; car, sur une surface algébrique pour laquelle $p_g > 0$, on ne peut avoir une suite continue de courbes unicursales. Les solutions (x, z), en nombre fini ou infini, ne pourront donc former qu'une suite discontinue. C'est ce que nous avons trouvé pour le cas étudié plus haut en détail : il y avait alors une infinité de solutions *dépendant d'un entier arbitraire*.

D'ailleurs, *en général,* pour la courbe (4), on pourra déduire d'une solution rationnelle une infinité d'autres, car, en menant la tangente au point correspondant, on aura par son intersection avec la courbe un second point à coordonnées rationnelles, et ainsi de suite, en remarquant de plus que deux points en donnent

un troisième. C'est ainsi, en fait, que se sont trouvés obtenus *tous* les points cherchés sur la courbe $z^2 = f(x) f(y)$ ([1]).

26. Arrêtons-nous encore sur un cas particulier, celui de la surface

$$(5) \qquad z^2 = a(y)\, x^4 - b(y),$$

a et b étant des polynomes arbitraires en y. D'après notre théorie générale, nous avons à étudier les équations

$$(6) \qquad x^2 + P(y)\, x + Q(y) = 0 \quad (\text{P et Q rationnelles en } y),$$

telles que, x et y satisfaisant à une telle relation, z soit fonction rationnelle de x et y. Cherchons les équations (6) jouissant de cette propriété, en supposant que a et b sont des polynomes *non spéciaux*.

On aura, pour x satisfaisant à l'équation (6),

$$(7) \qquad \sqrt{ax^4 - b} = Mx + N,$$

M et N étant des fonctions rationnelles de y.

Soit maintenant

$$\theta = \sqrt[4]{\frac{b}{a}},$$

on aura

$$ax^4 - b = a(x - \theta)(x + \theta)(x + \theta i)(x - \theta i).$$

Si donc nous posons

$$x - \theta = \frac{\theta}{X},$$

on pourra écrire

$$ax^4 - b = \frac{b}{X^4}(2X + 1)[X(1 - i) + 1][X(1 + i) + 1].$$

L'identité (7) devient alors

$$(7^{bis}) \quad \sqrt{b(2X + 1)[X(1 - i) + 1][X(1 + i) + 1]} = M\theta(1 + X)X + NX^2,$$

([1]) Il est intéressant de noter que la question à laquelle nous venons d'être conduits, de satisfaire à l'équation (4) par des fonctions rationnelles x et z de y, peut être regardée comme une généralisation du problème de la transformation des fonctions elliptiques.

ceci sous la condition que X satisfasse à la relation (8), transformée de (6),

$$(8) \qquad X^2(\theta^2+P\theta+Q)+X(2\theta^2+P\theta)+\theta^2=0.$$

En se servant de (8), la relation (7bis) peut s'écrire

$$\sqrt{b(2X+1)[X(1-i)+1][X(1+i)+1]} = -(M\theta+N)\left[\frac{X(2\theta^2+P\theta)}{\theta^2+P\theta+Q}+\frac{\theta^2}{\theta^2+P\theta+Q}\right]+M\theta X.$$

Par conséquent, le polynome du troisième degré en X

$$(9) \qquad b(2X+1)[X(1-i)+1][X(1+i)+1] - \left\{(M\theta+N)\left[\frac{X(2\theta^2+P\theta)}{\theta^2+P\theta+Q}+\frac{\theta^2}{\theta^2+P\theta+Q}\right]-M\theta X\right\}^2$$

est divisible par le premier membre de (8); il admet donc un diviseur de premier degré en X à coefficients rationnels en y et θ. Si donc nous posons

$$Z^2=(2X+1)[X(1-i)+1][X(1+i)+1],$$

on pourra exprimer Z et X en fonctions rationnelles de y, θ et $\sqrt{b}$.

La fonction X (nécessairement finie) ainsi déterminée doit nécessairement se réduire à une constante, car autrement l'élément différentiel

$$\frac{dX}{\sqrt{(2X+1)[X(1-i)+1][X(1+i)+1]}}$$

par la substitution de cette valeur de X, prendrait la forme

$$R(y, \theta, \sqrt{b})\,dy,$$

R étant rationnel en y, θ et $\sqrt{b}$. Il y aurait donc une intégrale de première espèce, relative à la courbe gauche dans l'espace (ξ, ζ, τ)

$$\xi=y, \qquad \zeta=\theta, \qquad \tau=\sqrt{b},$$

n'ayant que deux périodes, ce qui n'a pas lieu pour a et b polynomes quelconques en y.

Le polynome (9) en X doit donc s'annuler pour une quantité X, indépendante de y. Cette constante X doit annuler le polynome



du troisième degré

$$(2X+1)[X(1-i)+1][X(1+i)+1],$$

car autrement $\sqrt{b}$ s'exprimerait alors rationnellement à l'aide de θ et de y.

Si alors X est une des racines du polynome précédent, on aura

$$(M\theta+N)\left[\frac{X(2\theta^2+P\theta)}{\theta^2+P\theta+Q}+\frac{\theta^2}{\theta^2+P\theta+Q}\right]-M\theta X=0.$$

Cette équation du troisième degré en θ doit être une identité, car θ ne peut satisfaire à une équation du troisième degré à coefficients rationnels en y.

En développant cette équation en θ, on trouve de suite

$$M(X+1)\theta^3+N(2X+1)\theta^2+\theta X(PN-QM)=0,$$

il faut donc que

$$M=0, \qquad X=-\frac{1}{2}, \qquad P=0.$$

L'équation (6) est donc de la forme

$$x^2+Q(y)=0,$$

et l'on a alors

$$z=N.$$

Donc, s'il existe des solutions au problème posé, on a, dans l'équation

$$z^2=a(y)x^4-b(y),$$

z et x^2, qui sont fonctions rationnelles de y.

Posant $x^2=v$, nous sommes donc ramenés à reconnaître si l'équation

$$z^2=a(y)v^2-b(y)$$

peut être vérifiée en prenant pour v et z des fonctions rationnelles de y. On peut établir facilement qu'il en est ainsi ([1]). Il y a même

---

([1]) Dans l'article cité page 254, M. Picard démontre ce fait, auquel il rattache un théorème bien connu de M. Nœther sur certaines surfaces unicursales, en faisant l'énumération des constantes arbitraires. On peut supposer que a et b sont de degré pair $2m$, et soit $v=\frac{u}{w}$, en désignant par u et w des polynomes de de-

une infinité de solutions se déduisant de l'une d'entre elles; il suffit en effet de faire pivoter une droite autour d'un premier point à coordonnées rationnelles de cette conique, pour exprimer z et v en fonctions rationnelles de y et d'un paramètre m. En prenant pour m une fonction rationnelle de y, on aura toutes les expressions de z et v en fonctions rationnelles de y.

En retranchant d'une intégrale de différentielle totale de troisième espèce relative à la surface

$$z^2 = a(y)x^4 - b(y)$$

des expressions de la forme

$$\mathrm{C}\log(z + \mathrm{P}x^2 + \mathrm{R}),$$

C étant une constante, et P et R des fonctions rationnelles de y, on ramènera l'intégrale à n'avoir, en dehors peut-être de lignes $y = \text{const.}$, que les deux courbes logarithmiques correspondant à une équation *déterminée*

$$x^2 + \mathrm{Q}(y) = 0$$

du type envisagé plus haut. L'étude des intégrales de différentielles de la surface peut alors être effectuée complètement, puisque toutes ces intégrales sont susceptibles de se ramener à la forme

$$\int \frac{\mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy}{[x^2 + \mathrm{Q}(y)]\,z},$$

A et B étant des *polynomes* en x, à coefficients rationnels en y. En général (c'est-à-dire pour a et b polynomes arbitraires en y), ces intégrales sont algébrico-logarithmiques.

---

gré μ. Le polynome

$$a(y)\,u^2 - b(y)\,w^2$$

doit être un carré parfait. Comme il est de degré $2m + 2\mu$, le nombre des conditions sera $m + \mu$. D'autre part, le nombre des constantes figurant dans u et w est $2\mu + 1$; comme

$$2\mu + 1 \geqq m + \mu$$

à partir d'une certaine valeur de μ, il est possible de satisfaire au problème proposé.



IV. — Sur des classes de surfaces dont toutes les intégrales sont algébrico-logarithmiques [1].

27. Les cas particuliers que nous venons d'examiner se rapportaient à des surfaces donnant des sections du genre *un*, pour $y = \text{const.}$ Voici des cas plus généraux et mettant en évidence des circonstances intéressantes.

Envisageons la surface

$$z^2 = f(x)\,F(y),$$

$f(x)$ étant un polynome de degré $2p+1$ (à racines simples) et $F(y)$ un polynome arbitraire. D'après la théorie générale, développée précédemment (page 250), nous avons à rechercher les courbes

$$\varphi(x, y) = 0$$

de degré p au plus en x, telles que, pour (x, y) satisfaisant à cette dernière équation, z soit fonction rationnelle de x et de y. Nous allons démontrer que de telles courbes n'existent pas, en dehors des courbes $x = a$, en désignant par a une racine de $f(x)$.

Soit

$$z = \sqrt{F(y)}\,\zeta,$$

on aura

$$\zeta^2 = f(x),$$

et l'on pourra satisfaire à cette équation en prenant pour ζ une fonction rationnelle de x, y et $\sqrt{F(y)}$, les deux lettres x et y étant liées par la relation $\varphi = 0$, que l'on suppose exister. Donnons à y une valeur déterminée et considérons une détermination de $\sqrt{F(y)}$; on aura, pour x, les p racines $x_1, x_2, \ldots, x_p$, en supposant φ de degré p et irréductible. Formons les sommes

$$\text{(E)} \qquad \frac{x_1^\lambda\,dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2^\lambda\,dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} + \ldots + \frac{x_p^\lambda\,dx_p}{\sqrt{f(x_p)}} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Puisque $\sqrt{f(x_i)}$ est une fonction rationnelle de x_i, y et $\sqrt{F(y)}$,

(1) E. Picard, *Comptes rendus*, t. CXXXVI, et *Annales de l'École Normale*, 1903.

les sommes précédentes seront de la forme

$$R_\lambda[y, \sqrt{F(y)}]\, dy,$$

les R_λ étant rationnelles en y et $\sqrt{F(y)}$, et les intégrales

$$\int R_\lambda[y, \sqrt{F(y)}]\, dy$$

seront des intégrales de première espèce. Toutes les fonctions R_λ ne peuvent être identiquement nulles (à moins que les x ne soient constants); car, des équations obtenues en égalant à zéro les expressions (E), on déduirait que deux des x sont égaux, ce qui est contradictoire avec l'irréductibilité supposée de l'équation $\varphi = 0$. Ceci posé, nous aurons donc au moins une intégrale de première espèce relative à la courbe

$$u^2 = F(y),$$

qui aura les mêmes périodes qu'une intégrale de première espèce relative à la courbe

$$v^2 = f(x).$$

Cette circonstance ne peut se présenter *si le polynome* $F(y)$ *est arbitraire,* ce qui démontre l'impossibilité de la relation $\varphi = 0$ jouissant de la propriété indiquée.

Nous avons supposé le polynome irréductible φ de degré p par rapport à x; la même démonstration s'appliquerait si φ était d'un moindre degré que p.

De cette analyse nous concluons [en remarquant de plus que la surface

$$z^2 = f(x)\, F(y)$$

n'a pas d'intégrale de seconde espèce] que *toutes les intégrales relatives à cette surface sont algébrico-logarithmiques.* On suppose, bien entendu, que $F(y)$ est un polynome arbitraire.

28. Les conclusions précédentes s'étendraient immédiatement (en raisonnant comme au n° 24) aux équations de la forme

$$z^2 = a(y)\, x^{2p+1} + b(y),$$

a et b étant des polynomes arbitraires en y.

29. Nous avons donc ainsi obtenu des cas particuliers assez étendus pour lesquels les intégrales de différentielles totales de troisième espèce peuvent être étudiées. Si l'on cherche à traiter le cas d'une surface de degré m (à singularités ordinaires)

$$f(x, y, z) = 0,$$

on devra considérer les courbes gauches tracées sur cette surface. Soit une telle courbe de la surface; elle coupe la courbe définie par la relation entre x et z

$$f(x, \bar{y}, z) = 0$$

en un certain groupe de points dépendant rationnellement du paramètre y. Il faudrait donc étudier les groupes de points sur la courbe précédente *qui dépendent rationnellement* de y. On peut supposer que ces groupes de points ne contiennent pas plus de p points (p désignant le genre de la courbe f pour y arbitraire); c'est ce que nous allons commencer par démontrer.

Envisageons en effet un groupe de λ points ($\lambda > p$), et rappelons-nous que la dimension des adjointes d'ordre $m - 3 + \alpha (\alpha \geqq 1)$ est

$$p - 2 + m\alpha.$$

Or on peut choisir un nombre μ dans la suite

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m - 1,$$

de telle sorte que l'on ait

$$\lambda + \mu = p - 2 + m\alpha \qquad (\alpha \text{ entier } \geqq 1).$$

Ceci posé, nous avons vu que les m points à l'infini de la courbe f sont à considérer comme distincts au point de vue de la rationalité par rapport à y. Joignons alors aux λ points du groupe considéré, μ des points à l'infini; nous pouvons dire que nous avons un groupe de $\lambda + \mu$ points dépendant rationnellement de y. Par ces $\lambda + \mu$ points on peut faire passer une adjointe au moins d'ordre

$$m - 3 + \alpha,$$

et, en dehors des $\lambda + \mu$ points et des points doubles, nous avons p points de rencontre. Nous sommes donc ramenés à un groupe

de p points (dont quelques-uns pourraient être à l'infini); c'est ce que nous voulions montrer.

30. L'étude générale des groupes de p points sur la courbe f, dépendant rationnellement de y, ne paraît pas facile. Nous allons étudier seulement le cas particulier de la courbe

$$(\alpha) \qquad z^m = x^m + \mathrm{P}(y),$$

où $\mathrm{P}(y)$ est un polynome *arbitraire* de degré m. Nous considérons donc sur la courbe (α) entre z et x un groupe de p points $\left[p \text{ étant ici } \frac{(m-1)(m-2)}{2}\right]$ dépendant rationnellement de y; posons

$$x = \xi \sqrt[m]{\mathrm{P}(y)},$$
$$z = \zeta \sqrt[m]{\mathrm{P}(y)};$$

on aura

$$(\beta) \qquad \zeta^m = \xi^m + 1.$$

Sur la courbe (β) correspond au groupe des p points de la courbe (α) un groupe de p points dépendant rationnellement de y et de $\sqrt[m]{\mathrm{P}(y)}$. Désignons ces p points par

$$(\xi_1, \zeta_1), \quad (\xi_2, \zeta_2), \quad \ldots, \quad (\xi_p, \zeta_p),$$

et soit une intégrale de première espèce de la courbe (β)

$$\int \frac{\mathrm{Q}_i(\xi, \zeta)\, d\xi}{\zeta^{m-1}};$$

la somme

$$\frac{\mathrm{Q}_i(\xi_1, \zeta_1)\, d\xi_1}{\zeta_1^{m-1}} + \frac{\mathrm{Q}_i(\xi_2, \zeta_2)\, d\xi_2}{\zeta_2^{m-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{Q}_i(\xi_p, \zeta_p)\, d\xi_p}{\zeta_p^{m-1}}$$

(où les différentielles sont relatives à la variable y) sera nécessairement de la forme

$$\mathrm{R}_i\left[y, \sqrt[m]{\mathrm{P}(y)}\right] dy,$$

R_i étant une fonction rationnelle de y et $\sqrt[m]{\mathrm{P}(y)}$, et l'intégrale

$$\int \mathrm{R}_i\left[y, \sqrt[m]{\mathrm{P}(y)}\right] dy$$

sera nécessairement une intégrale de *première espèce* relative à

la courbe entre u et y

$$u^m = P(y).$$

Nous avons donc les p équations

$$\frac{Q_i(\xi_1, \zeta_1)\, d\xi_1}{\zeta_1^{m-1}} + \frac{Q_i(\xi_2, \zeta_2)\, d\xi_2}{\zeta_2^{m-1}} + \ldots + \frac{Q_i(\xi_p, \zeta_p)\, d\xi_p}{\zeta_p^{m-1}} = R_i\left[y, \sqrt[m]{P(y)}\right] dy$$

pour $i = 1, 2, \ldots, p$.

Si ces équations admettent une solution donnant pour toute fonction symétrique des p points $(\xi_1, \zeta_1) \ldots (\xi_p, \zeta_p)$ une fonction rationnelle de y et $\sqrt[m]{P(y)}$, il est nécessaire que les périodes des intégrales

$$\int R_i\left[y, \sqrt[m]{P(y)}\right] dy \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

soient des périodes correspondantes des intégrales

$$\int \frac{Q_i(\xi, \zeta)\, d\xi}{\zeta^{m-1}}.$$

Or ceci est impossible, quand le polynome $P(y)$ est un polynome arbitraire de degré m (en supposant $m > 3$); car alors il ne peut arriver qu'une intégrale de première espèce relative à la courbe

$$u^m = P(y)$$

n'ait d'autres périodes que celles d'une intégrale de première espèce relative à la courbe

$$\zeta^m = \xi^m + 1.$$

On en conclut que tous les R sont identiquement nulles, et nous avons les relations

$$(\gamma) \quad \frac{Q_i(\xi_1, \zeta_1)\, d\xi_1}{\zeta_1^{m-1}} + \frac{Q_i(\xi_2, \zeta_2)\, d\zeta_2}{\zeta_2^{m-1}} + \ldots + \frac{Q_i(\xi_p, \zeta_p)\, d\xi_p}{\zeta_p^{m-1}} = 0 \;\; (i = 1, 2, \ldots, p).$$

On peut énoncer ce résultat sous une autre forme. Soient

$$(\xi_1^0, \zeta_1^0), \quad (\xi_2^0, \zeta_2^0), \quad \ldots, \quad (\xi_p^0, \zeta_p^0)$$

les valeurs des (ξ, η) pour $y = y_0$ et une certaine détermination de $\sqrt[m]{P(y_0)}$; la somme des intégrales

$$\int_{\xi_1^0, \zeta_1^0}^{\xi_1, \zeta_1} + \int_{\xi_2^0, \zeta_2^0}^{\xi_2, \zeta_2} + \ldots + \int_{\xi_p^0, \zeta_p^0}^{\xi_p, \zeta_p},$$

où nous n'avons pas écrit l'élément

$$\frac{Q_i(\xi, \zeta)\, d\xi}{\zeta^{m-1}},$$

sera une fonction de y, dont la dérivée est nulle. Elle est donc égale à une constante (à des périodes près), et cette constante est nulle (d'après sa valeur pour $y = y_0$).

Les équations (γ) nous apprennent d'ailleurs, si les (ξ, η) dépendent de y, que le déterminant

$$| Q_i(\xi_h, \zeta_h) | = 0,$$

et, par suite, les points

$$(\xi_1, \zeta_1), \quad \ldots, \quad (\xi_p, \zeta_p)$$

sont sur une adjointe d'ordre $m - 3$.

Ceci posé, considérons une telle adjointe passant par ces points; elle rencontre encore la courbe (β) aux $p - 2$ points

$$(\alpha_1, \beta_1), \quad \ldots, \quad (\alpha_{p-2}, \beta_{p-2}).$$

Pour $y = y_0$, on aura en particulier

$$(\alpha_1^0, \beta_1^0), \quad \ldots, \quad (\alpha_{p-2}^0, \beta_{p-2}^0).$$

On aura évidemment, pour toute intégrale de première espèce,

$$\int_{\xi_1^0, \zeta_1^0}^{\xi_1, \zeta_1} + \int_{\xi_2^0, \zeta_2^0}^{\xi_2, \zeta_2} + \ldots + \int_{\xi_p^0, \zeta_p^0}^{\xi_p, \zeta_p} + \int_{\alpha_1^0, \beta_1^0}^{\alpha_1^0, \beta_1^0} + \ldots + \int_{\alpha_{p-2}^0, \beta_{p-2}^0}^{\alpha_{p-2}^0, \beta_{p-2}^0} = 0.$$

Or, si l'on a une courbe de genre p et $2p - 2$ points de cette courbe situés sur une adjointe d'ordre $m - 3$,

$$(\xi_1^0, \zeta_1^0), \quad \ldots, \quad (\xi_{2p-2}^0, \eta_{2p-2}^0),$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour que $2p - 2$ autres points

$$(\xi_1, \zeta_1), \quad \ldots, \quad (\xi_{2p-2}, \eta_{2p-2})$$

soient sur une adjointe d'ordre $m - 3$ s'expriment par les p relations

$$\int_{\xi_1^0, \zeta_1^0}^{\xi_1, \zeta_1} + \int_{\xi_2^0, \zeta_2^0}^{\xi_2, \zeta_2} + \ldots + \int_{\xi_{2p-2}^0, \zeta_{2p-2}^0}^{\xi_{2p-2}, \zeta_{2p-2}} \equiv 0,$$

formées avec les p intégrales de première espèce.

Hosted by Google

Si nous appliquons ce résultat, nous voyons que les $2p-2$ points

$$(\xi_1, \zeta_1), \quad \ldots, \quad (\xi_p, \zeta_p), \quad (\alpha_1^0, \beta_1^0), \quad \ldots, \quad (\alpha_{p-2}^0, \beta_{p-2}^0)$$

sont sur une adjointe d'ordre $m-3$. Par suite, si nous revenons à la courbe entre z et x,

$$z^m = x^m + P(y),$$

nous aurons sur elle le groupe des p points, dont nous sommes parti, situé sur une adjointe d'ordre $m-3$, et cette adjointe rencontrera la courbe en $p-2$ points dont les coordonnées seront

$$\alpha_i^0 \sqrt[m]{P(y)}, \qquad \beta_i^0 \sqrt[m]{P(y)} \quad (i = 1, 2, \ldots, p-2).$$

La correspondance entre les deux courbes

$$z^m = x^m + P(y) \quad \text{et} \quad \zeta^m = \xi^m + 1$$

est d'ailleurs telle qu'à un point de la première correspondent m points de la seconde $\left[\text{suivant la détermination de } \sqrt[m]{P(y)}\right]$, et les coordonnées de ces m points diffèrent par un facteur qui est une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité.

Il résulte de là que, pour la surface

$$z^m = x^m + P(y),$$

on peut trouver une surface

$$R(x, y, z) = 0$$

de degré $m-3$ en x et z, rencontrant la surface à distance finie suivant la courbe initiale considérée (correspondant au groupe des p points), et suivant les $p-2$ courbes planes

$$x - \lambda_i z = 0 \qquad \left(\lambda_i = \frac{\alpha_i^0}{\beta_i^0}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, p-2);$$

il pourra y avoir aussi des courbes de rencontre correspondant à $y = \text{const.}$, ces constantes étant racines de $P(y) = 0$.

Remarquons que λ_i^m est différent de *un*, à cause de la relation

$$(\beta_i^0)^m = (\alpha_i^0)^m + 1;$$

nous supposons ici le point (α_i^0, β_i^0) à distance finie; s'il était à

l'infini, le point (x, z) serait à l'infini pour y arbitraire, et, par suite, sans intérêt pour nous. De ce que λ_i n'est pas une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité, il résulte que le plan

$$x - \lambda_i z = 0$$

coupe la surface suivant une courbe irréductible.

31. De ces résultats nous allons pouvoir tirer des conclusions intéressantes sur les intégrales de différentielles totales relatives à la surface de degré m

$$z^m = x^m + P(y),$$

où $P(y)$ est un polynome arbitraire de degré m.

Par la soustraction d'expressions de la forme

$$C \log R(x, y, z) - C \sum_i \log(x - \lambda_i z),$$

où R a la signification du paragraphe précédent et où C désigne une constante convenable, nous pouvons ramener l'intégrale à n'avoir plus à distance finie d'autres lignes logarithmiques que des courbes correspondant à $y = \text{const.}$ Nous faisons, en effet, disparaître par ces soustractions toutes les courbes logarithmiques à distance finie, en n'introduisant peut-être que des courbes logarithmiques correspondant à des équations de la forme $y = a$, a étant une racine de $P(y) = 0$, valeur pour laquelle la courbe entre z et x se décompose en m droites.

En résumé, par des soustractions de logarithmes de fonctions rationnelles, nous sommes assuré de pouvoir ramener toute intégrale de différentielle totale relative à la surface

$$z^m = x^m + P(y)$$

à une intégrale ne pouvant avoir, à distance finie, d'autres courbes logarithmiques que les droites correspondant aux sections de la surface par les plans $y = a$ [a étant racine de $P(y)$]. On n'oubliera pas d'ailleurs que toute l'analyse précédente suppose que le polynome $P(y)$ n'est pas un polynome particulier de degré m.

32. Soit donc l'intégrale de différentielle totale

$$\text{(E)} \qquad \int P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy,$$



n'ayant d'autres lignes logarithmiques que les droites sections de la surface par les plans $y = a$, où a est racine de $P(y)$.

L'intégrale

$$(\alpha) \qquad \int P(x, \bar{y}, z)\, dx$$

sera une intégrale abélienne pour la courbe entre z et x

$$z^m = x^m + P(\bar{y})$$

($\bar{y}$ étant arbitraire et différent des a), n'ayant pas de point singulier logarithmique à distance finie, puisque l'intégrale (E) n'a d'autres lignes logarithmiques que les droites sections de la surface par les plans $y = a$. On sait d'ailleurs que, par la soustraction d'une expression de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x} R(x, y, z),$$

on ramènera l'intégrale (α) à la forme

$$\int \frac{F(x, \bar{y}, z)\, dx}{z^{m-1}},$$

F étant un polynome en x et z à coefficients rationnels en y, et l'on peut supposer que le degré de ce polynome en x et z est au plus $2m - 4$.

Les périodes (polaires ou cycliques) de cette intégrale ne doivent pas dépendre de y. L'intégrale précédente est de la forme

$$\sum \int \frac{a_{\alpha\beta} x^\alpha z^\beta\, dx}{z^{m-1}},$$

α et β étant des entiers positifs ($\alpha + \beta \leqq 2m - 4$), et les $a_{\alpha\beta}$ étant des fonctions rationnelles de y. Considérons d'abord les termes pour lesquels $\alpha + \beta$ a la valeur k, comprise entre 0 et $m - 4$, et la valeur $k + m$.

En posant dans l'équation de la courbe

$$z^m = x^m + P(y), \qquad z = \zeta \sqrt[m]{P(y)} \qquad \text{et} \qquad x = \xi \sqrt[m]{P(y)},$$

nous aurons une intégrale où

$$P(y)^{\frac{k+2}{m}}$$

sera un facteur, et qui sera de la forme

$$(\mathrm{I}) \qquad \sum \mathrm{P}(y)^{\frac{k+2}{m}} \int \frac{a_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha \zeta^\beta\,d\xi}{\zeta^{m-1}}$$

$a_{\alpha\beta}$ étant encore rationnelle en y et ne représentant pas nécessairement la même fonction que plus haut.

Envisageons ensuite les termes où $\alpha + \beta$ a la valeur $m - 3$; on est alors conduit à l'expression

$$(\mathrm{II}) \qquad \sum \mathrm{P}(y)^{\frac{m-1}{m}} \int \frac{a_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha \zeta^\beta\,d\xi}{\zeta^{m-1}}.$$

Enfin, les termes où $\alpha + \beta = m - 2$ conduisent à

$$(\mathrm{III}) \qquad \sum \int \frac{a_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha \zeta^\beta\,d\xi}{\zeta^{m-1}}.$$

La somme des périodes des intégrales (I), (II) et (III) doit être une constante indépendante de y. Il s'ensuit que la somme des périodes des intégrales (I) et (II) doit être nulle; sinon

$$\sqrt[m]{\mathrm{P}(y)}$$

satisferait à une équation d'ordre $m - 1$ au plus, dont les coefficients seraient rationnels en y.

Nous concluons de là que, dans l'intégrale

$$\int \frac{\mathrm{F}(x, \bar{y}, z)\,dx}{f'_z},$$

les termes qui correspondent à $\alpha + \beta \neq m - 2$ donnent une fonction rationnelle de x, y et z. On peut retrancher celle-ci de l'intégrale de différentielle totale envisagée, et nous avons alors une intégrale de différentielle totale, dans laquelle le coefficient de dx est

$$\sum \frac{a_{\alpha\beta}\,x^\alpha z^\beta}{z^{m-1}} \qquad (\alpha + \beta = m - 2).$$

Les périodes de l'intégrale

$$\int \sum \frac{a_{\alpha\beta}\,x^\alpha z^\beta\,dx}{z^{m-1}} \quad (a_{\alpha\beta} \text{ fraction rationnelle})$$

ne doivent pas dépendre de y.

Il en sera ainsi *si les $a_{\alpha\beta}$ sont des constantes,* et il est facile dans ce cas d'avoir la valeur de l'intégrale. Désignons par ε une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité et écrivons

$$\log(z - \varepsilon x)$$

sous la forme d'une intégrale de différentielle totale, et nous rappelant que

$$z^m = x^m + P(y).$$

Le coefficient de dx sera

$$\frac{1}{z - \varepsilon x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \varepsilon\right)$$

ou

$$\frac{1}{z - \varepsilon x}\,\frac{x^{m-1} - \varepsilon z^{m-1}}{z^{m-1}} = -\frac{1}{\varepsilon^{m-1}}\,\frac{z^{m-1} - \varepsilon^{m-1} x^{m-1}}{z - \varepsilon x}\,\frac{1}{z^{m-1}},$$

et l'on a, par suite, l'intégrale

$$-\frac{1}{\varepsilon^{m-1}}\int \frac{z^{m-2} + \varepsilon x z^{m-3} + \varepsilon^2 x^2 z^{m-4} + \ldots + \varepsilon^{m-2} x^{m-2}}{z^{m-1}}\,dx,$$

qui est de la forme des intégrales considérées plus haut. En prenant successivement pour ε les m racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité, nous aurons ainsi m intégrales dont la somme est nulle, et l'on voit immédiatement que toute intégrale

$$\int \frac{x^\alpha z^\beta\,dx}{z^{m-1}} \qquad (\alpha + \beta = m - 2)$$

est la somme de $m - 1$ des intégrales précédentes, et s'exprime par conséquent par les logarithmes de $z - \varepsilon x$ en prenant pour ε $(m - 1)$ racines $m^{\text{ièmes}}$ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ de l'unité.

Nous avons supposé que les $a_{\alpha\beta}$ ne dépendent pas de y. *Si les $a_{\alpha\beta}$ dépendent de y,* l'intégrale considérée

$$\int \sum \frac{a_{\alpha\beta} x^\alpha z^\beta\,dx}{z^{m-1}}$$

aura pour valeur

$$\sum_{i=1}^{i=m-1} \varphi_i \log(z - \varepsilon_i x),$$

les φ étant des fonctions rationnelles de y. On aurait donc une in-

tégrale de différentielle totale

$$\int A\,dx + B\,dy,$$

relative à la surface

$$z^m = x^m + P(y),$$

dans laquelle

$$A = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=1}^{i=m-1}\varphi_i \log(z - \varepsilon_i x),$$

les φ étant rationnelles en y. Mais ceci est impossible, si les φ ne sont pas des constantes, car on aurait, à cause de $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$,

$$B = \frac{\partial}{\partial y}\sum_{i=1}^{i=m-1}\varphi_i \log(z - \varepsilon_i x) + \text{fonction de } y,$$

et cette fonction B ne peut être rationnelle en x, y et z que si les φ sont des constantes. Il en résulte que les intégrales considérées de la surface sont nécessairement de la forme

$$\Sigma\, C_i \log(z - \varepsilon_i x) + \Sigma\, A \log(y - a) + R(y),$$

les C et les A étant des constantes, et $R(y)$ une fonction rationnelle de y.

Nous pouvons donc conclure :

Toutes les intégrales de différentielles totales relatives à la surface

$$z^m = x^m + P(y)$$

[où $P(y)$ est un polynome arbitraire de degré m], *s'expriment par des combinaisons algébrico-logarithmiques.*

33. Terminons en cherchant le nombre des courbes irréductibles sur la surface précédente répondant à l'énoncé du théorème fondamental de la page 241. Étant considérée une courbe irréductible quelconque de la surface, on peut, d'après tout ce qui précède, former une intégrale de différentielle totale n'ayant d'autres courbes logarithmiques que cette courbe, et la totalité ou une partie de la courbe à l'infini et des droites sections de la surface

par les plans

$$y = a$$

[a étant racine de $P(y)$].

Or de cette intégrale on peut faire disparaître comme courbes logarithmiques les m droites obtenues en coupant la surface par le plan

$$y = a_1,$$

a_1 étant une racine *déterminée* de $P(y)$, et les $m - 1$ droites sections de la surface par le plan

$$z - \varepsilon_1 x = 0,$$

ε_1 étant une racine $m^{\text{ième}}$ *déterminée* de l'unité (la $m^{\text{ième}}$ droite d'intersection figurant déjà parmi les m précédentes). On peut, en effet, retrancher de l'intégrale l'expression

$$\begin{aligned} &A_2 \log(y - a_2) + \ldots + A_m \log(y - a_m) \\ &\quad + B_1 \log(z - \varepsilon_1 x) + B_2 \log(z - \varepsilon_2 x) + \ldots + B_m \log(z - \varepsilon_m x), \end{aligned}$$

les A et les B étant des constantes convenablement choisies de façon à faire disparaître les $2m - 1$ lignes logarithmiques indiquées.

Donc, en considérant les $(m - 1)^2$ lignes droites Δ de la surface *situées* dans les plans

$$y = a_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, m)$$

et *non situées* dans le plan

$$z - \varepsilon_1 x = 0,$$

il existe certainement une intégrale de troisième espèce ayant comme lignes logarithmiques une courbe arbitrairement choisie, et la totalité ou une partie des lignes Δ et de la courbe à l'infini. D'ailleurs, il n'existe pas d'intégrale ayant seulement comme courbes logarithmiques la totalité ou une partie des lignes Δ et de la courbe à l'infini. En effet, d'après le paragraphe précédent, une telle intégrale serait, à une fonction rationnelle près, de la forme

$$\begin{aligned} &C_1 \log(z - \varepsilon_1 x) + C_2 \log(z - \varepsilon_2 x) + \ldots + C_m \log(z - \varepsilon_m x) \\ &\quad + A_1 \log(y - a_1) + \ldots + A_m \log(y - a_m). \end{aligned}$$

Or les droites de la surface dans le plan

$$y = a_1$$

ne doivent pas être des courbes logarithmiques. Donc, on doit avoir

$$C_1 + A_1 = 0, \qquad C_2 + A_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad C_m + A_1 = 0;$$

l'expression est donc de la forme

$$-A_1 P(y) + A_1 \log(y - a_1) + \ldots + A_m \log(y - a_m),$$

car

$$(z - \varepsilon_1 x)(z - \varepsilon_2 x)\ldots(z - \varepsilon_m x) = P(y).$$

Donc, l'expression peut encore s'écrire

$$A'_2 \log(y - a_2) + \ldots + A'_m \log(y - a_m),$$

et, comme les droites situées dans le plan

$$z - \varepsilon_1 x = 0$$

ne doivent pas être des courbes logarithmiques, tous les A' sont nuls.

Le nombre désigné par ρ dans l'énoncé du théorème fondamental est donc ici égal à

$$(m - 1)^2 + 1.$$

34. Nous venons de déterminer le nombre ρ pour les surfaces de degré m supérieur à *trois,* dont l'équation est de la forme

$$z^m = x^m + P(y).$$

Une question se pose de suite : *Quelle est la valeur de ρ pour une surface donnée?*

Nous ne sommes malheureusement pas en état de répondre toujours à une telle question, et c'est là une lacune importante dans la théorie. On pourrait seulement indiquer aisément une limite supérieure, résultant de la démonstration même du théorème fondamental, mais cette limite manque de précision. C'est surtout, comme on va le voir dans les Chapitres suivants, pour la théorie des intégrales doubles de seconde espèce que cette lacune est regrettable.

Quant à la question déjà plusieurs fois soulevée, de savoir si, pour une surface, les intégrales de différentielles totales se ramènent *en général* à des combinaisons algébrico-logarithmiques,



les exemples assez étendus qui viennent d'être indiqués tendent à faire pencher vers l'affirmative. Toutefois, le théorème assez singulier de la page 243 rend hésitant dans l'énoncé d'une probabilité.

Pour ce qui concerne les surfaces dont l'équation est de la forme

$$z^2 = f(x, y) \qquad (\text{de degré } 2p + 1 \text{ en } x),$$

il semble que l'étude des relations

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (\text{de degré } p \text{ en } x),$$

telles que z se mette sous la forme d'une fraction rationnelle de x et y [quand on a $\varphi(x, y) = 0$] ne soit pas inabordable, au moins pour des valeurs assez petites de p.

D'après les exemples donnés dans cette section, il ne paraît pas douteux qu'il n'existe pas *en général* de telles relations. S'il en est bien ainsi, on a des exemples extrêmement étendus de surfaces pour lesquelles toutes les intégrales de différentielles totales sont algébrico-logarithmiques.

CHAPITRE X [1].

DES RELATIONS ENTRE LA THÉORIE DES INTÉGRALES DOUBLES DE SECONDE ESPÈCE ET CELLE DES INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

I. — Quelques remarques préliminaires sur la forme de certaines identités.

1. Nous avons vu (Chapitres VII et VIII) que toutes les intégrales doubles de seconde espèce relatives à la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

se ramènent aux intégrales

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

le polynome Q s'annulant sur la courbe double. Le degré de ce polynome Q est limité et ses coefficients satisfont à certaines relations que nous avons appris à former. Mais toutes les intégrales doubles ainsi obtenues ne sont pas distinctes, et il faut indiquer la marche à suivre pour trouver exactement le nombre des intégrales *distinctes* de seconde espèce [2], c'est-à-dire des intégrales

---

[1] E. Picard, *Sur quelques points fondamentaux dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Acta mathematica*, t. XXVI); *Sur les relations entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et celle des intégrales de différentielles totales* (*Comptes rendus*, t. CXXXVII, et *Annales de l'École Normale*, 1903).

[2] Le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce a été désigné par ρ (p. 186). Dans le Chapitre précédent figure, d'autre part, un nombre ρ relatif aux intégrales de différentielles totales de troisième espèce. Il ne faut pas faire de confusion entre ces deux nombres; aussi *désignerons-nous dorénavant par* ρ_0 *le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce.*

dont aucune combinaison linéaire n'est de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

A et B étant des fonctions rationnelles de x, y et z. On répondra aisément à cette question si l'on sait reconnaître à quelles conditions l'expression donnée

$$\frac{Q(x, y, z)}{f'_z}$$

est de la forme

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

A et B étant rationnelles en x, y et z; bien entendu z est regardée comme fonction de x et y, quand on fait les différentiations partielles. Mais nous avons déjà indiqué à la fin du Chapitre VIII (p. 228) quelles circonstances venaient compliquer la question : c'est que l'on ne sait pas *a priori*, dans l'identité

$$\frac{Q(x, y, z)}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

pour quelles courbes A et B peuvent devenir infinies.

2. Supposons donc que l'on ait l'identité précédente. Désignons par

$$G(x, y) = 0$$

la projection de la courbe double sur le plan des xy, et par

$$g(x, y) = 0$$

la projection sur le même plan de la courbe de contact de la surface avec le cylindre parallèle à Oz.

Dans l'identité ci-dessus, A et B peuvent devenir infinies pour diverses courbes de la surface, et l'on peut avoir *a priori* pour ces fonctions des expressions de la forme

$$A = \frac{U(x, y, z)}{g(x, y)^{\lambda}\, G(x, y)^{\mu}\, \varphi_1(x, y)^{\alpha_1} \cdots \varphi_r(x, y)^{\alpha_r} f'_z},$$

$$B = \frac{V(x, y, z)}{g(x, y)^{\lambda'}\, G(x, y)^{\mu'}\, \varphi_1(x, y)^{\alpha'_1} \cdots \varphi_r(x, y)^{\alpha_r} f'_z},$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ représentent des polynomes irréductibles en x

et y, premiers entre eux et avec g et G, et contenant x ; les lettres λ, μ, α_1, ..., α_r représentent des entiers positifs. Quant aux numérateurs U et V, ce sont des polynomes en x et z, à coefficients rationnels en y.

Nous allons montrer tout d'abord que l'on ne diminue pas la généralité en supposant que les entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_r$ sont égaux à *un*. En effet, considérons l'expression B comme une fonction rationnelle de x et z, relative à la courbe entre x et z,

$$f(x, \overline{y}, z) = 0;$$

on sait, par la théorie élémentaire de la réduction des intégrales abéliennes [1], que l'on peut de B retrancher une expression qui soit la dérivée par rapport à x d'une fonction rationnelle R de x, y et z, de manière que

$$B - \frac{\partial R}{\partial x}$$

soit de la même forme que B, sauf que $\alpha'_1 = \alpha'_2 = \ldots = \alpha'_r = 1$. Or écrivons l'identité

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}$$

sous la forme

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A + \frac{\partial R}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B - \frac{\partial R}{\partial x}\right);$$

nous avons réalisé la substitution cherchée, car on a

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y}$$

et, dans le numérateur de B_1, les polynomes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ figurent seulement à la première puissance. Il faut donc qu'il en soit de même dans A_1, puisque

$$\frac{Q}{f'_z}$$

reste finie le long des diverses lignes de rencontre de $\varphi_i(x, y) = 0$ avec la surface f_1, et que ces lignes sont des lignes simples de rencontre pour les deux surfaces

$$\varphi_i = 0, \quad f = 0.$$

---

[1] Pour cette réduction, on pourra consulter le Tome I de cet Ouvrage (p. 160) et aussi le Tome I, 2e éd., du *Traité d'Analyse* de M. Picard (p. 66).

On le voit immédiatement de la manière suivante. Supposons que A_1 renferme au dénominateur φ_1 à la puissance α_1 supérieur à *un*. Alors $\frac{\partial A_1}{dx}$ contiendra le terme

$$-\alpha_1 \frac{U(x, y, z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}}{g^\lambda G^\mu \varphi_1^{\alpha_1+1} \ldots \varphi_r^{\alpha_r} f'_z}.$$

Or $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ est premier avec φ_1 (pour y arbitraire). Si donc U ne s'annule pas pour les courbes d'intersection du cylindre φ_1 avec la surface, ce terme aura une ligne d'infini d'ordre $\alpha_1 + 1$, que ne renferme pas l'expression $\frac{\partial B_1}{\partial y}$, ce qui est impossible.

3. Ces considérations ne sont pas immédiatement applicables pour ce qui concerne g et G. On peut bien dans B ramener encore, au moyen des mêmes considérations élémentaires, les puissances de g et G à être égales à *un*, mais dans A les puissances de g et G pourraient être égales à *deux*. Soit en effet l'identité

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

où A et B ont les valeurs écrites plus haut, en supposant

$$\lambda' = \mu' = 1.$$

Nous allons voir que λ et μ sont au plus égaux à *deux*. Considérons G; le cylindre

$$G = 0$$

coupe la surface suivant la courbe double Γ et une autre courbe γ. Le premier membre ne devenant pas infini pour un point arbitraire de l'une ou l'autre de ces courbes, il en est de même du second. Par suite, B ayant Γ comme ligne d'infini *double*, il faudra que A ait seulement Γ comme ligne d'infini double. Quant à γ qui est ligne d'infini simple pour B, elle sera ligne d'infini simple pour A. Il résulte de là que

$$\frac{U(x, y, z)}{[G(x, y)]^\mu}$$

ne peut avoir les lignes Γ et γ que comme lignes d'infini *simples*.

Soit μ supérieur à *deux;* alors $U(x, y, z)$ devra avoir γ comme ligne de zéro double, et il en sera de même pour Γ. Il en résulte que le quotient

$$\frac{U(x, y, z)}{G(x, y)}$$

pourra se mettre sous la forme d'un polynome en x et z, à coefficients rationnels en y. Par suite, on passera de μ à $\mu - 1$ jusqu'à ce que $\mu = 2$.

On ne peut faire plus loin la réduction, puisque, pour que

$$\frac{U(x, y, z)}{[G(x, y)]^2}$$

ait Γ pour ligne d'infini simple, il suffit que U ait Γ pour ligne de zéro simple et, par suite,

$$\frac{U(x, y, z)}{G(x, y)}$$

ne se mettra pas en général sous la forme d'un polynome en x et z.

Les conclusions que nous venons de formuler pour la ligne double se projetant suivant G sont applicables à la ligne de contour apparent qui se projette suivant g.

Donc, en suivant la méthode indiquée, on voit que l'on peut supposer

$$\lambda' = \mu' = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda = \mu = 2.$$

4. En modifiant légèrement les considérations précédentes, on va voir que l'on peut supposer également que λ et μ sont égaux à l'unité.

Commençons par faire une remarque relative à une courbe algébrique

$$f(x, y) = 0.$$

Si a correspond à un point double A de f, on sait que, d'une expression

$$\frac{P(x, y)}{(x - a)^2 f'_y}$$

(P étant un polynome en x et y), on peut retrancher la dérivée d'une fonction rationnelle de x et y, de manière à être ramené

à $\alpha = 1$; c'est un résultat sur lequel nous nous sommes appuyés tout à l'heure.

On peut aller plus loin et supposer que, après cette réduction, le polynome $P(x, y)$ s'annulera au point double.

Supposons en effet la réduction faite à $\alpha = 1$. Si P ne s'annule pas au point double, la fonction

$$\frac{P(x, y)}{(x-a)f'_y}, \tag{1}$$

a, au point A, un pôle double sur chacune des branches de courbe passant en A. On peut trouver une fonction rationnelle de x et y ayant à distance finie seulement deux pôles simples qui soient précisément le point A regardé comme appartenant à l'une et l'autre branche, les résidus, de plus, ayant pour ces deux pôles les valeurs données. Il suffira de retrancher de (1) la dérivée d'une telle fonction (en prenant pour les résidus des valeurs convenables) pour avoir une expression de la même forme, et où $P(x, y)$ s'annulera au point double.

Une remarque analogue peut être faite pour le cas où la droite $x = a$ serait tangente à f en un point A. On peut faire d'abord la réduction habituelle ramenant à $\alpha = 1$; soit alors l'expression que nous appellerons encore (1). On voit de suite que l'on peut retrancher de (1) une expression convenable de la forme

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{M(x, y)}{(x-a)}\right], \tag{2}$$

où $M(x, y)$ est un polynome s'annulant en A et aux autres points de rencontre de $x = a$ avec la courbe, de telle sorte que la différence de (1) et (2) soit encore de la forme (1), mais avec cette condition que $P(x, y)$ s'annule en A.

5. Ces remarques faites, nous pouvons raisonner comme aux nos 2 et 3; mais nous pourrons maintenant supposer que nous avons, dans B, non seulement

$$\lambda' = \mu' = 1, \qquad \alpha'_1 = \alpha'_2 = \ldots = \alpha'_r = 1;$$

mais que, de plus, $V(x, y, z)$ s'annule pour la courbe double et pour la courbe de contour apparent.

Il en résulte qu'on peut compléter le raisonnement du n° 3. Dans

$$\frac{U(x, y, z)}{[G(x, y)]^{\mu}},$$

la courbe double Γ ne doit plus être une ligne d'infini et, par suite, on peut supposer que μ est égal à l'unité; il en est de même pour λ.

Finalement, après ces réductions élémentaires, *nous arrivons à la conclusion que l'identité admise peut prendre la forme*

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}, \tag{3}$$

où

$$A = \frac{U(x, y, z)}{g\,G\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_r f'_z}, \qquad B = \frac{V(x, y, z)}{g\,G\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_r f'_z},$$

U *et* V *étant des polynomes en* x *et* z *à coefficients rationnels en* y, *s'annulant sur la courbe double et sur la courbe de contour apparent de la surface sur le plan des* xy.

6. Nous pouvons faire diverses remarques au sujet de A et B.

En raisonnant comme au n° 3 du Chapitre VIII (p. 209), on déduit de l'identité (3) que les périodes logarithmiques de l'intégrale abélienne

$$\int A\,dy$$

se rapportant à la courbe entre y et z

$$f(\bar{x}, y, z) = 0,$$

et se rapportant à un point double de cette courbe, doivent être des constantes, c'est-à-dire indépendantes de x. Or le calcul du résidu de A relatif à un point double de la courbe précédente est facile; ce résidu est égal à la valeur de

$$\frac{U}{g\,G\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_r} \tag{4}$$

au point double, multipliée par

$$\frac{1}{\sqrt{(f''_{zy})^2 - f''_{z^2}f''_{y^2}}}.$$

Or la valeur de (4), en un point double, dépend de la branche

de courbe que l'on envisage passant au point double, puisque U et G s'annulent sur la courbe double. Cette valeur est égale à

$$\frac{1}{g\cdot\varphi_1\ldots\varphi_r}\,\frac{\dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{\partial U}{\partial z}\,\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\dfrac{\partial G}{\partial y}}.$$

Quant à $\frac{\partial z}{\partial y}$ il a pour valeurs les racines de l'équation du second degré

$$f''_{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2f''_{zy}\frac{\partial z}{\partial y}+f''_{y^2}=0.$$

La valeur cherchée est donc la valeur de l'expression suivante sur la courbe double

$$(5)\qquad \frac{1}{g\cdot\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_r}\,\frac{\left(f''_{z^2}\dfrac{\partial U}{\partial y}-f''_{zy}\dfrac{\partial U}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial U}{\partial z}R}{\dfrac{\partial G}{\partial y}f''_{z^2}.R},$$

en posant

$$R=\sqrt{(f''_{zy})^2-f''_{z^2}f''_{y^2}}.$$

D'après ce que nous avons dit, l'expression (5) doit avoir une valeur constante sur la courbe double. Si nous sommes dans ce que nous avons appelé *le cas général* (*voir* p. 208) où R n'est pas une fonction rationnelle de x, y, z quand le point (x, y, z) se déplace sur la courbe double, le radical R sera susceptible d'avoir changé de signe, quand (x, y, z) partant d'un point déterminé de la courbe double y reviendra, en étant restée sur cette courbe. Donc, dans ces conditions, pour que (S) reste constant, on devra avoir, en désignant par C la valeur constante de (5) sur la courbe double,

$$(6)\qquad \begin{cases} f''_{z^2}\dfrac{\partial U}{\partial y}-f''_{zy}\dfrac{\partial U}{\partial z}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial z}=C\dfrac{\partial G}{\partial y}g\varphi_1\ldots\varphi_r f''_{z^2},\end{cases}$$

ces identités ayant, bien entendu, lieu sur la courbe double.

De là nous allons tirer une conséquence importante. Nous pouvons mettre $\frac{Q}{f'_z}$ sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A-C\frac{\dfrac{\partial G}{\partial y}}{G}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(B+C\frac{\dfrac{\partial G}{\partial x}}{G}\right),$$

et cette expression est de la forme

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y},$$

en posant

$$A_1 = \frac{U_1}{g\,G\,\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_r f'_z}, \qquad B_1 = \frac{V_1}{g\,G\,\varphi_1\ldots\varphi_r f'_z},$$

où l'on a

$$U_1 = U - C.g.\varphi_1\ldots\varphi_r f'_z \frac{\partial G}{\partial y}.$$

U_1 est, comme U, un polynome en x et z qui s'annule sur la courbe double, mais, de plus, nous allons voir que

$$\frac{U_1}{G}$$

s'annule sur la courbe double. Ceci résulte de ce que

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial U_1}{\partial z}$$

sont nuls sur la courbe double, comme on le voit immédiatement d'après les relations (6).

Ainsi donc, nous avons un résultat plus complet qu'au n° 5. Nous pouvons dire que l'on a l'identité (3), où, non seulement U et V s'annulent sur la courbe double, *mais où de plus*

$$\frac{U}{G} \quad \text{et} \quad \frac{V}{G}$$

s'annulent sur cette courbe. On peut encore dire que les deux surfaces $U = 0$, et $V = 0$ ont, comme ligne double, la ligne double de f.

7. Nous allons faire une remarque analogue concernant la ligne de contour apparent C de la surface relative au plan des xy.

Partons toujours de l'identité (3). Nous coupons la surface par le plan $y = \overline{y}$, et nous envisageons un des points de rencontre M de ce plan avec la courbe C. Considérons alors ce point M sur la courbe

$$f(x, \overline{y}, z) = 0.$$

En intégrant les deux membres de (3) dans le plan de la variable

complexe x le long d'un circuit qui entoure *deux* fois le point M, nous aurons *zéro* dans le premier membre; le premier terme du second membre donnera également *zéro*. Pour le second terme, la quantité, sous le signe $\frac{\partial}{\partial y}$, donne au facteur $4\pi i$ près la valeur parfaitement déterminée en M

$$\frac{V(x, y, z)}{\frac{\partial g}{\partial x} G \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_r f'_z}. \tag{6'}$$

La dérivée par rapport à y de cette valeur devant être nulle, il en résulte que, *le long de la courbe* C, l'expression précédente a une valeur constante C'.

Or, désignons par x_1 et z_1 l'x et le z du point M. Si l'on développe $f(x, y, z)$ suivant les puissances de $x - x_1$ et $z - z_1$, on aura

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = f'_{x_1}(x - x_1) \\ + \frac{1}{1.2}[f''_{x_1^2}(x - x_1)^2 + 2f''_{x_1 z_1}(x - x_1)(z - z_1) \\ + f''_{z_1^2}(z - z_1)^2] + \ldots, \end{aligned}$$

et soit de même pour $V(x, y, z)$ développé suivant les puissances de $x - x_1$ et $z - z_1$

$$V(x, y, z) = V'_{x_1}(x - x_1) + V'_{z_1}(z - z_1) + \ldots.$$

Comme $z - z_1$ est de l'ordre de $\sqrt{x - x_1}$, d'après l'équation $f = 0$, il résulte de là que la valeur de l'expression (6') au point M est égale à

$$\frac{V'_z}{\frac{\partial g}{\partial x} G \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_r f''_{z^2}},$$

en entendant que, dans cette expression, x et z sont remplacées par x_1 et z_1; cette valeur est précisément égale à C'.

Écrivons alors l'identité (3) de la manière suivante :

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A + C' \frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{g}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B - C' \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{g}\right).$$

Elle est de la forme

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y},$$

en posant

$$A_1 = \frac{U_1}{g\,G\,\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_r f'_z}, \qquad B_1 = \frac{V_1}{g\,G\,\varphi_1\ldots\varphi_r f'_z},$$

avec

$$V_1 = V - C'\frac{\partial g}{\partial x} G\,\varphi_1\ldots\varphi_r f'_z.$$

Il résulte de la valeur de C' que, dans le développement de V_1 suivant les puissances de $x - x_1$ et $z - z_1$, il n'y aura pas de terme du premier degré en $z - z_1$. Donc $\frac{V_1}{g}$ a une valeur finie le long de la courbe C, et il en est de même de $\frac{U_1}{g}$.

Par suite, en rapprochant ce résultat de celui que nous avons obtenu au paragraphe précédent, nous pouvons dire, en revenant à l'identité (3) du n° 5, qu'il est permis de supposer que, *dans cette identité,*

$$\frac{U}{G} \quad \text{et} \quad \frac{V}{G}$$

s'annulent sur la courbe double, et que

$$\frac{U}{g} \quad \text{et} \quad \frac{V}{g}$$

ont des valeurs finies le long de la courbe de contour apparent. Nous allons voir maintenant comment on peut réduire encore les éléments arbitraires dans l'identité (3).

II. — Réduction plus complète et introduction du nombre ρ.

8. Nous supposons toujours que l'on ait l'identité (3)

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

où

$$A = \frac{U(x, y, z)}{g\,G\,\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_r f'_z}, \qquad B = \frac{V(x, y, z)}{g\,G\,\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_r f'_z}.$$

A et B peuvent être infinies le long des courbes se projetant sur le plan des xy suivant

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_r = 0.$$

Nous allons faire disparaître ces lignes d'infini de A et B, et les remplacer par un nombre *déterminé* de lignes d'infini.

D'après le théorème fondamental du Chapitre IX (p. 241), on peut tracer sur la surface $\rho - 1$ courbes particulières

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_{\rho-1},$$

telles qu'il existe une intégrale de troisième espèce ayant seulement pour courbes logarithmiques une autre courbe arbitrairement choisie, et la totalité ou une partie des courbes $C_1, \ldots, C_{\rho-1}$ et de la courbe à l'infini; de plus, d'après la démonstration même, cette intégrale n'aura aucune autre ligne d'infini en dehors de lignes du type $y = \text{const.}$

Soit Δ une courbe de la surface se projetant suivant

$$\varphi_1(x, y) = 0,$$

et le long de laquelle A et B deviennent infinies. On pourra former une intégrale de troisième espèce ayant pour courbe logarithmique Δ et la totalité ou une partie des courbes C précédentes et de la courbe à l'infini. Cette intégrale sera de la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\varphi_1(x, y)\,g_1(x, y)\ldots g_{\rho-1}(x, y) f'_z},$$

en désignant par

$$g_1(x, y) = 0, \qquad \ldots, \qquad g_{\rho-1}(x, y) = 0,$$

les projections des $\rho - 1$ courbes C, et par P et Q des polynomes en x et z à coefficients rationnels en y. Les fonctions P et Q s'annuleront le long des courbes de la surface se projetant suivant

$$\varphi_1 = 0, \qquad g_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad g_{\rho-1} = 0,$$

distinctes de Δ et des courbes C_h, et sur la courbe double.

On aura d'ailleurs la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{\varphi_1 g_1 \ldots g_{\rho-1} f'_z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{\varphi_1 g_1 \ldots g_{\rho-1} f'_z}\right) = 0,$$

et, de plus, le long de la courbe Δ, l'expression

$$\frac{P}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} g_1 \ldots g_{\rho-1} f'_z}$$

se réduira à une constante différente de zéro, puisqu'elle représente, au facteur $2\pi i$ près, une période logarithmique de l'intégrale.

Revenons à l'identité (3)

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

et supposons que le point (x, y, z) reste dans le voisinage d'un point M d'ailleurs arbitraire de la courbe Δ. Le premier membre de l'identité précédente ne devenant pas infini dans ces conditions, on pourra écrire

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

λ étant une fonction holomorphe de x et y dans le voisinage de M. Donc

$$\int B\,dx - (A - \lambda)\,dy$$

est une intégrale de différentielle totale ayant autour du point M la courbe Δ comme courbe logarithmique, et l'on en déduit de suite que l'expression

$$\frac{V(x, y, z)}{g\,G\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\,\varphi_2 \ldots \varphi_r f'_z}$$

se réduit à une constante sur la courbe Δ, car elle représente au facteur $2\pi i$ près une période logarithmique de l'intégrale. Or le second membre de l'identité (3) peut s'écrire

$$(\alpha) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(A - C\,\frac{Q}{\varphi_1 g_1 \ldots g_{\rho-1} f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B + C\,\frac{P}{\varphi_1 g_1 \ldots g_{\rho-1} f'_z}\right),$$

C désignant une constante arbitraire. Or on peut choisir la constante C de manière que

$$\frac{V(x, y, z)}{g\,G\,\varphi_2 \ldots \varphi_r f'_z} + C\,\frac{P}{g_1 \ldots g_{\rho-1} f'_z}$$

s'annule sur Δ, d'après les deux remarques ci-dessus. Par suite, pour un tel choix de C, la fonction sous le signe $\frac{\partial}{\partial y}$ dans l'expression (α) ne deviendra pas infinie le long de Δ, et alors il en sera nécessairement de même pour la fonction sous le signe $\frac{\partial}{\partial x}$.

Nous avons ainsi fait disparaître la ligne Δ comme ligne d'infini pour les fonctions figurant dans l'identité (3). En allant ainsi de proche en proche, nous arrivons à une identité

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

où A et B ont la forme

$$(7) \qquad A = \frac{M(x, y, z)}{g\,G\,g_1 g_2 \ldots g_{\rho-1} f'_z}, \qquad B = \frac{N(x, y, z)}{g\,G\,g_1 g_2 \ldots g_{\rho-1} f'_z},$$

M et N étant des polynomes en x et z à coefficients rationnels en y.

$$\frac{M}{g_i} \quad \text{et} \quad \frac{N}{g_i}$$

deviennent infinies le long de la courbe C_i, mais non suivant les autres courbes C_h. De plus, comme il arrivait au paragraphe précédent,

$$\frac{M}{G} \quad \text{et} \quad \frac{N}{G}$$

s'annulent sur la courbe double Γ, et

$$\frac{M}{g} \quad \text{et} \quad \frac{N}{g}$$

restent finies le long de la courbe de contour apparent C considérée plus haut.

9. Nous avons en somme remplacé toutes les lignes d'infini *qui n'étaient pas connues a priori* par des lignes déterminées

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_{\rho-1}.$$

Il reste encore à envisager, comme lignes d'infini de A et B, les lignes Γ' et C' suivant lesquelles les deux cylindres

$$G = 0, \qquad g = 0$$

coupent la surface, en dehors respectivement de la courbe double Γ et de la courbe de contour apparent C. Les considérations précédentes sont applicables sans modifications; on peut se débarrasser de ces deux lignes par des soustractions de même nature, et il arrive alors que, dans les expressions (7) de A et B, les polynomes

M et N, en gardant les propriétés indiquées, sont, de plus, tels qu'ils s'annulent le long des courbes Γ' et C'.

Il en résulte une propriété essentielle des quotients

$$\frac{M}{gG} \quad \text{et} \quad \frac{N}{gG};$$

ces quotients se réduisent à des polynomes en x et z. En effet, soit le quotient

$$\frac{M}{G};$$

il s'annule en général (c'est-à-dire pour un point arbitraire) sur la courbe double Γ, et, de plus, il reste fini sur la courbe Γ'. Ceci suffit à établir, d'après des propositions classiques, que $\frac{M}{G}$ est un polynome (en x et z). La façon dont M se comporte sur les courbes C et C' montre de même que $\frac{M}{gG}$ est un polynome.

Il résulte de là que l'identité (3) *du début peut s'écrire*

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

où

$$A = \frac{M(x, y, z)}{g_1 g_2 \ldots g_{\rho-1} f'_z}, \qquad B = \frac{N(x, y, z)}{g_1 g_2 \ldots g_{\rho-1} f'_z},$$

où M et N sont des polynomes en x et z (à coefficients rationnels en y) s'annulant sur la courbe double. Les polynomes g_1, g_2, .., $g_{\rho-1}$ correspondent aux projections sur le plan des xy de $\rho - 1$ courbes déterminées C_1, C_2, ..., $C_{\rho-1}$ et, pour y arbitraire, les quotients

$$\frac{M}{g_i} \quad \text{et} \quad \frac{N}{g_i}$$

deviennent infinis seulement suivant la courbe C_i.

Nous avons ainsi éliminé toute courbe d'infini de A *et* B *en dehors des courbes déterminées* C_1, C_2, ..., $C_{\rho-1}$ (*en laissant de côté, bien entendu, les courbes* $y =$ const.).

III. — Recherche du nombre des intégrales doubles de seconde espèce.

10. Les réductions précédentes étant supposées effectuées, la recherche théorique du nombre des intégrales doubles de seconde espèce ne présente plus de difficulté essentielle.

D'après ce que nous avons vu, toutes les intégrales doubles de seconde espèce sont réductibles à la forme

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

où le degré du polynome Q en x, y, z, qui s'annule sur la courbe double, est *limité* (*voir* Chap. VIII). Il s'agit de reconnaître, pour un polynome Q donné, si l'on peut satisfaire à l'identité

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

A et B ayant nécessairement les formes indiquées au paragraphe précédent.

Prenons d'abord le cas le plus simple, où pour la surface f, on a

$$\rho = 1.$$

Alors A et B ont la forme

$$A = \frac{M(x, y, z)}{f'_z}, \qquad B = \frac{N(x, y, z)}{f'_z},$$

M et N étant des polynomes en x et z, à coefficients rationnels en y; d'ailleurs, M et N comme Q s'annulent le long de la courbe double.

11. Avant d'aller plus loin, indiquons une propriété des fonctions algébriques d'une variable. Soit

$$f(x, y) = 0$$

une courbe algébrique, et considérons l'intégrale

$$\int \frac{Q(x, y)}{f'_y}\, dx,$$

où Q est un polynome en x et y s'annulant aux points doubles. L'intégrale deviendra, en général, infinie aux m points à l'infini, et aura en ces points des périodes logarithmiques. Appelons O_1, $O_2, \ldots, O_m$ les m points à l'infini. On peut former une intégrale de troisième espèce

$$\int \frac{q_i(x, y)\, dx}{f'_y} \qquad (i = 2, \ldots, m),$$

où q_i est un polynome, et ayant comme seuls points singuliers logarithmiques O_1 et O_i, avec périodes égales à $+1$ et -1. Il est clair alors qu'en choisissant convenablement les constantes

$$c_2, \quad c_3, \quad \ldots, \quad c_m,$$

l'intégrale

$$\int \frac{Q - c_2 q_2 - \ldots - c_m q_m}{f'_z}\, dx$$

n'aura plus de points singuliers logarithmiques à l'infini, et sera, par suite, une intégrale de seconde espèce. On aura donc, en désignant par

$$I_1, \quad I_2, \quad \ldots, \quad I_{2p}$$

les coefficients de dx dans un système de $2p$ intégrales distinctes de seconde espèce

$$\frac{Q}{f'_y} = a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_2 J_2 + \ldots + c_m J_m + \frac{dR}{dx},$$

en posant

$$J_i = \frac{q_i}{f'_z},$$

et R désignant une fonction rationnelle de x et y.

12. Appliquons ceci à la courbe entre x et z

$$f(x, y, z) = 0$$

renfermant le paramètre y. Toutes les opérations précédentes peuvent être appliquées à la fonction rationnelle de x et z,

$$\frac{N(x, y, z)}{f'_z};$$

elles sont elles-mêmes rationnelles, les m points à l'infini étant

distincts au point de vue de la rationalité par rapport à y. Dans la réduction précédente, les I et J seront des fonctions rationnelles *déterminées* de x, y et z, les a et les c seront des fonctions rationnelles de y, et R sera une fonction rationnelle de x, y et z. Soit donc, dans ces conditions,

$$\frac{N}{f'_z} = a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_2 J_2 + \ldots + c_m J_m + \frac{\partial R}{\partial x},$$

et écrivons l'identité sous la forme

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A + \frac{\partial R}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B - \frac{\partial R}{\partial x}\right).$$

On voit que l'on a

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y}, \tag{8}$$

en posant

$$B_1 = a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_2 J_2 + \ldots + c_m J_m.$$

Les I et J sont déterminés; il s'agit de voir si l'on peut satisfaire à l'identité (8) en prenant pour A_1 une fonction rationnelle de x, y et z, et pour les a et les c des fonctions rationnelles de y.

Nous avons maintenant à écrire que la différence

$$\frac{Q}{f'_z} - \frac{\partial B_1}{\partial y}$$

est la dérivée par rapport à x d'une fonction rationnelle de x, y et z. Dans ce calcul, y joue le rôle de paramètre, et nous avons à écrire qu'une fonction rationnelle de x et z relative à la courbe $f(x, y, z) = 0$ est une dérivée de fonction rationnelle. Les conditions exprimant ce fait sont bien connues; elles nous donnent ici

$$2p + m - 1$$

relations linéaires entre

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p}, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_m$$

et leurs dérivées premières. Aucune irrationalité par rapport à y ne s'introduit et ces relations contiennent rationnellement y.

Ces relations sont bien distinctes, et l'on pourra certainement en tirer

$$\frac{da_1}{dy}, \quad \frac{da_2}{dy}, \quad \ldots, \quad \frac{da_{2p}}{dy}, \quad \frac{dc_2}{dy}, \quad \ldots, \quad \frac{dc_m}{dy},$$

en fonction linéaire des a et des c, les coefficients étant rationnels en y. Les $m-1$ relations concernant les points à l'infini contiendront seulement les dérivées des c, dont elles donneront les valeurs en fonction de y; les $2p$ autres relations contiendront les a et les c [1].

Soit (S) le système de relations que nous venons de former. Si l'on peut y satisfaire en prenant pour les a et les c des fonctions rationnelles de y, on pourra mettre $\frac{Q}{f'_z}$ sous la forme demandée.

---

[1] Il n'est pas sans intérêt de remarquer que le problème que nous venons de traiter généralise le problème fondamental relatif à l'existence des intégrales de différentielles totales de seconde espèce (transcendantes). Reportons-nous au Tome I (page 164). Il faut chercher si l'on peut déterminer les fonctions rationnelles $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ de y, de manière que les périodes de l'intégrale

$$\int \frac{a_1 Q_1 + \ldots + a_{2p} Q_{2p}}{f'_z}\, dx$$

ne dépendent pas de y. Avec nos notations actuelles, on aura

$$\frac{Q_1}{f'_z} = I_1, \quad \ldots, \quad \frac{Q_{2p}}{f'_z} = I_{2p}.$$

D'autre part, soit

$$\int B_1\, dx - A_1\, dy$$

une intégrale de seconde espèce (transcendante). On peut supposer, comme il a été vu, que

$$B_1 = a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p},$$

et nous avons l'égalité

$$0 = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y}.$$

C'est l'égalité du texte, en supposant Q identiquement nul, ainsi que les c.

Profitons de l'occasion pour compléter l'analyse de la page 165 du Tome I, relative à la formation des équations différentielles linéaires devant donner les a. On y parviendra de suite en remarquant que l'intégrale abélienne

$$\int \frac{\partial}{\partial y} (a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p}) . dx,$$

relative à la courbe entre x et z

$$f(x, \bar{y}, z) = 0,$$

doit se réduire à une fonction rationnelle. En appliquant les conditions classiques dans la théorie des fonctions abéliennes, pour qu'une intégrale abélienne soit algébrique (par exemple les conditions données par Weierstrass), on formera de la manière la plus simple le système des équations différentielles linéaires relatif aux a.



Ceci résulte de ce que si une fonction rationnelle

$$F(x, y, z)$$

de x, y, z remplit les conditions pour qu'elle soit la dérivée d'une fonction rationnelle de x et z, ces lettres étant liées par la relation

$$f(x, y, z) = 0,$$

elle pourra être regardée comme la dérivée par rapport à x d'une fonction rationnelle de x, y et z. Soient, en effet, pour $x = x_0$, les m racines $z_1, z_2, \ldots, z_m$ de l'équation

$$f(x_0, y, z_i) = 0;$$

formons la somme

$$U = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{i=m}\int_{x_0, y, z_i}^{x, y, z} F(x, y, z)\,dx,$$

la lettre y étant regardée comme un paramètre dans l'intégration. La fonction U est une fonction rationnelle de x, y et z, et l'on a

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F.$$

On a donc simplement à rechercher si un système de

$$2p + m - 1,$$

équations différentielles linéaires à coefficients rationnels entre les a et les c peut être vérifié par des fonctions rationnelles. C'est là un problème classique. On est naturellement conduit à se demander si l'on pourrait trouver plusieurs systèmes de valeurs rationnelles des a et c satisfaisant aux relations (S); s'il existait deux tels systèmes de valeurs, leur différence conduirait à une expression B de la forme

$$B = \alpha_1 I_1 + \ldots + \alpha_{2p} I_{2p} + \gamma_2 J_2 + \ldots + \gamma_m J_m,$$

les α et γ étant rationnels en y, à laquelle on pourrait associer une fonction rationnelle A de x, y et z, telle que

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0.$$

L'intégrale

$$\int B\,dx - A\,dy$$

serait une intégrale de différentielle totale, ne pouvant avoir à distance finie que des courbes logarithmiques correspondant aux équations $y = \text{const}$. On peut faire disparaître ces dernières en retranchant de A la dérivée d'une expression convenable de la forme

$$\Sigma C_i \log(y - a_i) \qquad \text{(les C et les } a \text{ étant des constantes).}$$

Supposant l'intégrale ainsi préparée, celle-ci ne pourra avoir que la courbe à l'infini comme courbe logarithmique. Or, une intégrale ne pouvant avoir une seule courbe logarithmique, elle sera nécessairement une intégrale de seconde espèce, et, par suite, on devra avoir nécessairement

$$\gamma_2 = \ldots = \gamma_m = 0.$$

Si la surface ne possède pas d'intégrale de seconde espèce (transcendante), il faudra enfin que les α soient nuls, et, par suite, il ne peut y avoir deux solutions différentes pour notre problème. Il en serait autrement si la surface avait des intégrales de seconde espèce, mais on voit alors immédiatement quelles seraient les formes de B et A.

13. Dans le problème posé au n° 10, nous avons supposé $\rho = 1$. Dans le cas où ρ est quelconque, la solution va reposer sur une analyse analogue. Considérons la courbe C_i et formons, relativement à cette courbe, une intégrale comme celle de la page 132 (Chap. IX, n° 2); si H_i est le coefficient de dx dans cette intégrale, nous avons donc une intégrale abélienne

$$\int H_i\,dx \qquad (H_i \text{ rationnelle en } x, y, z),$$

relative à la courbe entre x et z

$$f(x, y, z) = 0,$$

ayant pour points singuliers logarithmiques le point à l'infini O_1, et les points de la courbe C_i ayant la valeur considérée du paramètre y.



Ceci dit, revenons à l'identité

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

où A et B ont les valeurs considérées au nº 9.

On pourra mettre B sous la forme

$$(9) \qquad \begin{aligned} B = \alpha_1 I_1 + \ldots + \alpha_{2p} I_{2p} + \gamma_2 J_2 + \ldots \\ + \gamma_m J_m + \eta_1 H_1 + \ldots + \eta_{\rho-1} H_{\rho-1} + \frac{\partial R}{\partial x}, \end{aligned}$$

R étant rationnelle en x, y, z; pour l'établir, il suffit de s'appuyer sur une extension immédiate du résultat énoncé au nº 11, en remarquant que, pour la fonction B regardée comme fonction rationnelle de x et z, les résidus correspondant aux points M de la courbe C_i correspondant à une valeur arbitraire de y sont égaux entre eux et indépendants de y. Ce dernier point se démontre en recourant à une considération dont nous avons déjà fait souvent usage sous des formes variées. En intégrant, pour une valeur fixe donnée à y, dans le plan de la variable x autour d'un point M les deux membres de l'identité

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y};$$

le premier membre donne zéro, ainsi que $\frac{\partial A}{\partial x}$, et, par suite, la dérivée par rapport à y du résidu de B relatif au point M est nulle, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas de y.

De là résulte que dans l'identité (9) les η *sont des constantes*, les α et les γ des fonctions rationnelles de y.

En écrivant comme plus haut

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A + \frac{\partial R}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B - \frac{\partial R}{\partial x}\right),$$

nous avons une identité de la même forme

$$(10) \qquad \frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y}$$

avec

$$B_1 = \alpha_1 I_1 + \ldots + \alpha_{2p} I_{2p} + \gamma_2 J_2 + \ldots + \gamma_m J_m + c_1 H_1 + \ldots + c_{\rho-1} H_{\rho-1},$$

les c étant des constantes, les α et les γ des fonctions rationnelles de y.

14. La question est donc de savoir si l'on peut satisfaire à l'identité (10), avec une valeur de B_1 de la forme indiquée. Nous n'avons qu'à procéder, comme au n° **10**, en écrivant que la différence

$$\frac{Q}{f'_z} - \frac{\partial B_1}{\partial y}$$

est la dérivée par rapport à x d'une fonction rationnelle de x, y et z. Ceci nous donnera

$$2p + m - 1$$

relations linéaires entre les α, les γ, leurs dérivées premières et les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_{\rho-1}$; les coefficients de ces relations sont rationnels en y.

Le problème est donc ramené à reconnaître si l'on peut déterminer les constantes c, de manière que les équations linéaires précédentes puissent être vérifiées par des fonctions rationnelles α et γ de y; cette question ne présente aucune difficulté théorique.

On reconnaîtra, de plus, par un raisonnement analogue à celui du n° **12**, que, s'il est possible de satisfaire à l'identité (10), ceci ne peut en général se faire que d'une seule manière.

En résumé, *si l'on connaît un système de courbes* C, il est possible de reconnaître *si une expression*

$$\frac{Q}{f'_z}$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

et l'on peut, par suite, dénombrer les intégrales distinctes de seconde espèce.

15. Ajoutons quelques remarques importantes. A chaque courbe C_i correspond une expression $\frac{Q}{f'_z}$, où Q est un polynome en x, y et z, susceptible de la forme indiquée.



Considérons en effet les courbes

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_{\rho-1},$$

et adjoignons à ces courbes une courbe déterminée, d'ailleurs arbitraire, γ. On peut former une intégrale de troisième espèce ayant pour courbes logarithmiques les lignes C_i, la courbe γ et la courbe à l'infini. Si la courbe γ est prise arbitrairement, chacune des courbes C_i sera effectivement une courbe logarithmique, c'est-à-dire que la période logarithmique correspondante ne sera pas nulle. Désignons cette intégrale par

$$(\alpha) \qquad \int \frac{P\,dx + Q\,dy}{g_1 g_2 \ldots g_{\rho-1} \Gamma f'_z},$$

Γ étant un polynome en x et y qui, égalé à zéro, donne la projection de γ dans le plan des xy. P et Q sont des polynomes en x et z à coefficients rationnels en y, s'annulant sur la courbe double et sur les lignes d'intersection avec les surfaces des cylindres

$$g_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad g_{\rho-1} = 0, \qquad \Gamma = 0,$$

en dehors de $C_1, C_2, \ldots, C_{\rho-1}$ et γ.

La condition d'intégrabilité nous donne

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{g_1 g_2 \ldots g_{\rho-1} \Gamma f'_z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{g_1 g_2 \ldots g_{\rho-1} \Gamma f'_z}\right) = 0.$$

Décomposons la fraction rationnelle de x et y

$$\frac{1}{g_1 g_2 \ldots g_{\rho-1} \Gamma}$$

en éléments simples, en la regardant comme une fonction rationnelle de x. On aura

$$\frac{1}{g_1 g_2 \ldots g_{\rho-1} \Gamma} = \frac{A_1}{g_1} + \frac{A_2}{g_2} + \ldots + \frac{A_{\rho-1}}{g_{\rho-1}} + \frac{B}{\Gamma},$$

B et les A étant des polynomes en x à coefficients rationnels en y. Nous avons alors

$$\sum_{i=1}^{i=\rho-1} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{QA_i}{g_i f'_z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{PA_i}{g_i f'_z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{BQ}{\Gamma f'_z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{BP}{\Gamma f'_z}\right) = 0.$$

Envisageons maintenant l'expression

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{QA_i}{g_i f'_z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{PA_i}{g_i f'_z}\right).$$

Elle ne devient pas infinie le long de la courbe C_i, puisque, d'après l'identité précédente, elle est égale à une expression n'ayant pas C_i comme ligne d'infini. Elle ne devient infinie à distance finie (en dehors de courbes $y =$ const.) que pour les points de la courbe de contour apparent désignée par C (n° 9).

Écrivons l'expression sous la forme

$$(11) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M}{g_i f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{N}{g_i f'_z}\right),$$

M et N étant des polynomes en x et z, à coefficients rationnels en y, et s'annulant sur la courbe double ainsi que sur la seconde courbe de rencontre du cylindre $g_i(x, y) = 0$ avec la surface.

La forme de l'expression (11), quand on ne développe pas les opérations, est immédiate; c'est

$$\frac{S(x, y, z)}{(f'_z)^3},$$

S étant un polynome en x et z, à coefficients rationnels en y. Cette expression n'a pas la forme, habituelle pour nous, où f'_z figure au premier degré au dénominateur. Nous allons voir que l'on peut déterminer deux polynomes U et V en x et z tels que la somme

$$(12) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M}{g_i f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{N}{g_i f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right)$$

soit de la forme voulue

$$\frac{T(x, y, z)}{f'_z},$$

T étant un polynome en x et z, à coefficients rationnels en y, s'annulant sur la courbe double. Imposons d'abord à U et V de s'annuler sur la courbe double; ensuite l'expression (12) peut s'écrire

$$-\frac{1}{g_i^2}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x}\frac{M}{f'_z} + \frac{\partial g_i}{\partial y}\frac{N}{f'_z}\right) - \frac{1}{g_i^2}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x}\frac{U g_i}{f'_z} + \frac{\partial g_i}{\partial y}\frac{V g_i}{f'_z}\right)$$
$$+\frac{1}{g_i}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M + U g_i}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{N + V g_i}{f'_z}\right)\right].$$

Nous réaliserons la condition cherchée, si

$$M + U g_i \quad \text{et} \quad N + V g_i$$

s'annulent sur la courbe C de contour apparent, et cette condition est évidemment réalisable. De là nous tirons la conclusion qu'à une courbe C_i on peut faire correspondre une expression

$$\frac{T_i(x, y, z)}{f'_z}$$

égale à

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M_1}{g_i f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{N_1}{g_i f'_z}\right),$$

les polynomes M_1 et N_1 en x et z s'annulant sur la courbe double, et les quotients $\frac{M_1}{g_i}$ et $\frac{N_1}{g_i}$ étant infinis seulement le long de la courbe C_i (en dehors de courbes $y =$ const.).

On peut aller un peu plus loin. Le polynome T_i en x et z contient y seulement rationnellement; soit

$$T_i(x, y, z) = \frac{P(x, y, z)}{\pi(y)},$$

P étant un polynome en x, y et z, et $\pi(y)$ un polynome en y. On a donc le quotient

$$(13) \qquad \frac{P(x, y, z)}{\pi(y) f'_z}.$$

Comme l'intégrale double

$$\iint \frac{P(x, y, z)}{\pi(y) f'_z}$$

est manifestement de seconde espèce, on peut (*voir* Chapitre VII) soustraire de (13) une expression

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A(x, y, z)}{\pi_1(y)}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B(x, y, z)}{\pi_1(y)}\right),$$

A et B étant des polynomes en x, y et z, et π_1 un polynome en y, de telle sorte que la différence ait la forme

$$\frac{Q_i(x, y, z)}{f'_z},$$

Q_i étant un polynome en x, y, z s'annulant *sur la courbe double*.

Finalement, nous avons une identité de la forme

$$\frac{Q_i(x, y, z)}{f'_z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M_i}{g_i f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{N_i}{g_i f'_z}\right),$$

M_i et N_i ayant les mêmes propriétés que les polynomes désignés plus haut par M_1 et N_1. Le polynome Q_i n'est d'ailleurs certainement pas nul identiquement sur la surface, car l'intégrale

$$\int \frac{N_i\,dx - M_i\,dy}{g_i f'_z}$$

serait une intégrale de différentielle totale, n'ayant (en dehors de courbes $y = \text{const.}$) d'autres courbes logarithmiques que la courbe C_i et la courbe à l'infini, ce qui est impossible. [La courbe C_i sera bien une courbe logarithmique effective, car elle l'est pour l'intégrale auxiliaire (α).]

De plus, et pour une raison analogue, aucune combinaison linéaire à coefficients constants

$$\frac{C_1 Q_1 + \ldots + C_{\rho-1} Q_{\rho-1}}{f'_z} \qquad \text{(les C n'étant pas tous nuls)},$$

ne peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right),$$

les U et V étant des polynomes en x et z, à coefficients rationnels en y.

16. Aux courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{\rho-1}$ correspondent ainsi des expressions

$$\frac{Q_1}{f'_z}, \quad \frac{Q_2}{f'_z}, \quad \ldots, \quad \frac{Q_{\rho-1}}{f'_z},$$

réductibles à la somme de deux dérivées partielles. *Toute autre expression*

$$\frac{Q}{f'_z}$$

(Q polynome en x, y et z s'annulant sur la courbe double) *réductible à une telle somme sera de la forme*

$$\frac{A_1 Q_1 + \ldots + A_{\rho-1} Q_{\rho-1}}{f'_z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right),$$

les A *étant des constantes,* U *et* V *étant des polynomes en x et z (à coefficients rationnels en y) s'annulant sur la courbe double.*

On s'en rend compte aisément, en se reportant à la forme de $\frac{Q}{f'_z}$ donnée au n° 9. Il suffira de décomposer le quotient

$$\frac{1}{g_1 g_2 \ldots g_{\rho-1}}$$

en éléments simples (en le regardant comme une fonction rationnelle de x) pour avoir la forme ci-dessus.

17. Toutes les considérations que nous venons de développer sont utilisables quand on a pu déterminer un système de courbes

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_{\rho-1}$$

jouissant des propriétés fondamentales relativement aux intégrales de différentielles totales de troisième espèce. Elles sont numériquement applicables sur un exemple donné, mais elles ne permettent guère d'énoncer, sur le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce, des propositions générales. C'est en les combinant avec l'étude des périodes des intégrales doubles, que nous obtiendrons dans le Chapitre suivant quelques lois importantes. Pour le moment, nous allons faire quelques applications à des cas particuliers très simples, qui nous donneront l'occasion de faire une remarque générale sur le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce.

IV. — Étude de quelques cas particuliers.

18. Nous avons déjà eu l'occasion d'utiliser la facilité avec laquelle s'appliquent les théories générales aux surfaces dont l'équation est de la forme

$$z^2 = f(x, y).$$

A la vérité, elles ne rentrent pas dans la catégorie des surfaces que nous avons appelées *à singularités ordinaires,* mais cependant avec peu de modifications les théorèmes généraux trouvent encore leur application (*voir,* en particulier, Chap. IX, p. 248). Ainsi, toutes les intégrales doubles de seconde espèce, relatives à

la surface précédente, sont réductibles à la forme

$$(14) \qquad \iint \frac{P(x, y)\, dx\, dy}{\sqrt{f(x, y)}},$$

P étant un polynome en x et y.

De plus, le degré du polynome P est limité. On le montre par une analyse analogue à celle de la page 182 de ce Volume, en soustrayant des expressions de la forme

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{\sqrt{f}}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{\sqrt{f}}\right),$$

U et V étant des polynomes en x et y.

Il sera, en général, simple d'écrire que l'intégrale double (14) est de seconde espèce. Prenons, par exemple, le cas où $f(x, y)$ serait un polynome en x et y de degré $2p$, en supposant que la courbe

$$f(x, y) = 0,$$

réductible ou non, n'ait que des points doubles à tangentes distinctes, et n'ait que des points simples à l'infini. L'intégrale reste finie pour x et y finis (le cas des points doubles de la courbe $f = 0$ se traite comme le cas des points doubles isolés d'une surface, page 121, du Tome I). Il reste à étudier les points à l'infini; on posera à cet effet

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{Y}{X}.$$

Si l'on a

$$f(x, y) = \frac{F(X, Y)}{X^{2p}},$$

l'intégrale se trouvera ramenée à

$$\iint \frac{Q(X, Y)\, dX\, dY}{X^{\mu} \sqrt{F(X, Y)}}.$$

Le seul cas à examiner est celui où l'entier μ est positif. En appliquant les indications de la théorie générale, on ramènera, par des soustractions convenables, ce cas à celui où $\mu = 1$, et l'on doit alors écrire que les résidus de l'intégrale

$$\iint \frac{Q(X, Y)\, dX\, dY}{X \sqrt{F(X, Y)}},$$

relatifs à $X = 0$, sont nuls, ce qui se fera en écrivant que l'intégrale hyperelliptique

$$\int \frac{Q(O, Y)\,dY}{\sqrt{F(O, Y)}}$$

se réduit à une fonction algébrique.

On a supposé plus haut que $f(x,y)$ était de degré $2p$; si f est de degré $2p+1$ dans la surface

$$z^2 = f(x, y),$$

il suffira de poser

$$x = \frac{1}{x'}, \qquad y = \frac{y'}{x'}, \qquad z = \frac{z'}{x'^{p+1}}$$

pour avoir une surface

$$z'^2 = f_1(x', y'),$$

où f_1 sera de degré pair et jouira des propriétés indiquées.

19. Nous nous bornerons, pour le moment, à examiner un cas très particulier, où nous pourrons utiliser quelques résultats du Chapitre précédent. Faisons seulement une remarque générale. Nous avons envisagé (p. 253) le nombre ρ relatif aux surfaces spéciales [1]

$$z^2 = f_1(x, y).$$

Si ce nombre ρ est égal à zéro, on aura le résultat suivant :

Toute expression

$$\frac{P(x, y)}{\sqrt{f(x,y)}},$$

susceptible de se mettre sous la forme

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

pourra s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M}{\sqrt{f}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{N}{\sqrt{f}}\right),$$

M et N étant des polynomes en x à coefficients rationnels en y,

---

[1] Pour ces surfaces spéciales, le nombre ρ présente une grande analogie avec le nombre désigné par la même lettre pour les surfaces à singularités ordinaires; aussi avons-nous conservé la même notation, quoiqu'il n'y ait pas d'identité à établir entre les deux nombres. Ici le nombre ρ peut être égal à *zéro*, tandis que précédemment il était au moins égal à *un*.

20. Envisageons, en particulier, les surfaces de la page 274,

$$z^2 = f(x)\,\mathrm{F}(y),$$

où $f(x)$ et $f(y)$ sont des polynomes arbitraires de degrés $2p+1$ et $2q+1$.

Par des réductions tout élémentaires, il est clair que toute intégrale double de seconde espèce est réductible à la forme

$$\iint \frac{\mathrm{P}(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{f(x)\,\mathrm{F}(y)}},$$

où $\mathrm{P}(x,y)$ est un polynome en x et y, de degré $2p-1$ par rapport à x, et de degré $2q-1$ par rapport à y. On va montrer que, si les polynomes f et F ne sont pas particuliers, aucune intégrale de ce type n'est réductible à la forme

$$\iint \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

En effet, pour les surfaces précédentes, les seuls cylindres

$$\varphi(x,y) = 0$$

(où φ est un polynome en x, de degré au plus égal à p), qui coupent la surface suivant deux courbes, se réduisent à $x = a$, a étant racine de f. Donc A et B peuvent être ramenés à la forme

$$\frac{\mathrm{U}(x,y)}{f(x)^\alpha \sqrt{f(x)\,\mathrm{F}(y)}},$$

U étant un polynome en x à coefficients rationnels en y. Mais le facteur $f(x)^\alpha$ du dénominateur peut lui-même disparaître, en retranchant, par exemple, de B une dérivée partielle convenable par rapport à x. Finalement, en appliquant à ce cas particulier les méthodes générales de la section précédente, on voit que B peut être supposé de la forme

$$\mathrm{B} = \frac{a_1 x^{2p-1} + \ldots + a_{2p}}{\sqrt{f(x)\,\mathrm{F}(y)}},$$

les a étant rationnels en y. Si donc

$$\frac{\mathrm{P}(x,y)}{\sqrt{f(x)\,\mathrm{F}(y)}}$$

est susceptible de la forme

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

on devra pouvoir déterminer les a rationnellement en y, de telle sorte que la différence

$$\frac{P(x,y)}{\sqrt{f(x)F(y)}} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{a_1 x^{2p-1} + \ldots + a_{2p}}{\sqrt{f(x)F(y)}}\right],$$

regardée comme fonction de x, soit la dérivée, par rapport à x, d'une fonction rationnelle de x et $\sqrt{f(x)}$. Mais ceci est impossible, car, $P(x, y)$ étant par rapport à x de degré $2p-1$, cette différence est de la forme

$$\frac{b_1 x^{2p-1} + \ldots + b_{2p}}{\sqrt{f(x)}},$$

les a dépendant de y seul. Or, une telle expression ne peut être la dérivée d'une fonction algébrique que si tous les b sont nuls. Donc, si l'on pose

$$P(x,y) = A_1 x^{2p-1} + \ldots + A_{2p},$$

les A étant des polynomes en y de degré $2q-1$, on devra avoir

$$\frac{A_i}{\sqrt{F(y)}} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{a_i}{\sqrt{F(y)}}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p);$$

mais ceci est impossible, car

$$\frac{A_i}{\sqrt{F(y)}},$$

où A_i est un polynome en y de degré $2q-1$, ne peut être la dérivée d'une fonction algébrique.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante : *Pour la surface*

$$z^2 = f(x)F(y),$$

le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce est égal à

$$4pq.$$

Ceci suppose que les polynomes $f(x)$ et $F(y)$ sont des polynomes arbitraires de degrés $2p+1$ et $2q+1$.

21. Arrêtons-nous plus particulièrement sur le cas où $f(x)$ et $F(y)$ sont du *troisième* degré. Nous pouvons énoncer alors avec plus de précision que la surface

$$z^2 = f(x)\,F(y)$$

aura *quatre* intégrales doubles distinctes de seconde espèce, ou que

$$\rho_0 = 4,$$

si l'on ne peut satisfaire à l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = C\,\frac{dy}{\sqrt{F(y)}},$$

C étant une constante convenable, par une fonction rationnelle x de y, ne se réduisant pas à une constante (*voir* p. 256).

Soient, en particulier, les polynomes F *et* f *identiques*. Nous ne serons pas alors dans le cas précédent. On a vu que, en laissant de côté les sections $x = a$ (a étant racine de f), le nombre ρ est égal à l'unité. Nous aurons alors *une* intégrale de la forme

$$\int\int \frac{A + Bx + Cy + Dxy}{\sqrt{f(x)f(y)}}\,dx\,dy \tag{15}$$

(A, B, C, D étant des constantes), qui sera réductible à la forme

$$\int\int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Cette intégrale, qui ne se rencontrait pas tout à l'heure, pourrait se déduire d'une analyse analogue à celle du n° 15 de ce Chapitre; cette analyse fait correspondre au couple de courbes correspondant à

$$x = y$$

une intégrale de la forme indiquée. On l'obtient encore en appliquant l'identité classique déjà rencontrée (*voir* notamment page 262)

$$\frac{U(x,y)}{\sqrt{f(x)f(y)}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sqrt{f(x)}}{(y-x)\sqrt{f(y)}}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sqrt{f(y)}}{(x-y)\sqrt{f(x)}}\right].$$

Le polynome $U(x,y)$ en x et y n'est pas du premier degré par

rapport à x et par rapport à y; mais par la soustraction d'une expression

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{M}{\sqrt{f(x)f(y)}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{N}{\sqrt{f(x)f(y)}}\right],$$

où M et N sont des polynomes en x et y, on peut ramener U à avoir la forme

$$A+Bx+Cy+Dxy$$

(A, B, C, D étant constantes), et l'on a alors une identité

$$\frac{A+Bx+Cy+Dxy}{\sqrt{f(x)f(y)}}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{R(x,y)}{(x-y)z}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{S(x,y)}{(x-y)z}\right]$$
$$[z=\sqrt{f(x)f(y)}],$$

où R et S sont des polynomes en x et y. D'ailleurs R et S ne sont évidemment pas nuls identiquement, et il en est, par suite, de même du premier membre, comme il résulte du n° 21 du Chapitre IX (p. 263).

Il y a donc une intégrale de la forme (15) qui est réductible, et, par suite, le nombre ρ_0 est diminué d'une unité. Il n'est pas diminué de plus d'une unité; c'est ce qui résulte de ce que l'on peut former une intégrale de différentielle totale ayant comme courbes logarithmiques le couple de courbes correspondant à $x=y$, et un couple quelconque de courbes correspondant à un cylindre $\varphi(x,y)=0$ (page 261). Nous avons donc pour la surface

$$z^2=f(x)f(y),$$

le nombre ρ_0 égal à *trois* ($\rho_0=3$). Ceci suppose toutefois, rappelons-le, que, pour le polynome du troisième degré $f(x)$, les fonctions elliptiques correspondantes n'admettent pas la multiplication complexe.

22. Les conclusions sont différentes si nous sommes dans un cas de multiplication complexe. Bornons-nous comme plus haut (page 265) à

$$f(x)=4x^3-1.$$

Il y a alors *deux* couples de courbes logarithmiques, pour une intégrale de troisième espèce, jouant le rôle fondamental dans la

réduction. Il n'y avait tout à l'heure que le couple correspondant à

$$x = y.$$

Nous avons ici en plus le couple correspondant à

$$x = y\varepsilon \quad (\varepsilon \text{ racine cubique de l'unité}),$$

à ce couple correspond une seconde intégrale du type (15) qui est réductible. Sans qu'il soit nécessaire d'insister, on a ici

$$\rho_0 = 2$$

pour la surface

$$z^2 = (4x^3 - 1)(4y^3 - 1).$$

Le résultat précédent est général quand le polynome $f(x)$ correspond à la multiplication complexe.

23. Ces exemples nous suffiront pour le moment. Ils appellent l'attention sur une circonstance extrêmement remarquable, je veux parler *du caractère arithmétique de l'invariant* ρ_0. Ce nombre ne dépend pas seulement de questions de configurations et de singularités relatives à la surface algébrique. La nature *arithmétique* des coefficients de l'équation influe sur sa valeur. Ainsi, pour la surface

$$z^2 = f(x)f(y),$$

le nombre ρ_0 est égal à *trois* en général. Ce nombre s'abaisse à *deux,* quand les coefficients de $f(x)$ satisfont aux conditions *arithmétiques* relatives à la multiplication complexe. L'invariant ρ_0 est donc, à ce point de vue, bien différent du genre riemannien p relatif aux courbes planes, ou des genres géométrique et arithmétique p_g et p_n que nous avons précédemment étudiés. On comprend combien cette circonstance rend difficile la recherche de lois générales. Nous ferons dans le Chapitre suivant l'étude des périodes des intégrales doubles, qui a de nombreux points de contact avec les questions qui nous ont occupés dans ce Chapitre. Terminons, pour le moment, par quelques remarques sur la réduction des intégrales doubles, en revenant à la surface à singularités ordinaires.



V. — Quelques remarques générales sur la réduction des intégrales doubles.

24. Reprenant la surface à singularités ordinaires, nous reviendrons un moment sur la question de la réduction des intégrales doubles de seconde espèce. Rappelons les résultats obtenus. Il a été démontré au Chapitre VII que toutes les intégrales doubles de seconde espèce pouvaient être ramenées, par la soustraction d'une intégrale

$$(16) \qquad \iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right)$$

(A et B rationnelles en x, y et z), à la forme

$$\iint \frac{P(x, y, z)}{f'_z} \, dx \, dy,$$

où P est un polynome *s'annulant sur la courbe double.*

On a ensuite procédé (même Chapitre) à la réduction de ces intégrales; elles ont, par la soustraction d'une intégrale

$$\iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U}{f'_z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V}{f'_z} \right) \right] dx \, dy$$

(U et V étant des polynomes en x, y et z), été ramenées à la forme

$$(17) \qquad \iint \frac{Q(x, y, z)}{f'_z} \, dx \, dy,$$

où le polynome Q en x, y et z ne s'annulait pas nécessairement sur la courbe double, mais était *de degré limité*. Il a été ensuite indiqué (Chap. VIII, p. 208) que ces dernières intégrales pouvaient elles-mêmes se ramener, par la soustraction d'une intégrale (16), à la même forme, avec degré limité, mais le polynome Q s'annulant alors sur la courbe double. La démonstration de ce résultat est très simple, en passant par l'intermédiaire d'une transformation birationnelle qui dissout la courbe double, transformant la surface donnée S en une surface Σ. On a alors pour la surface Σ

une intégrale double qui ne devient plus infinie sur la courbe double. On peut faire la réduction en faisant disparaître la ligne d'infini, qui est la transformée de la courbe double, et, en revenant à S, on a une intégrale qui reste finie sur la courbe double. Les transformations du Chapitre VII nous amènent à une intégrale de la forme (17), mais où Q s'annule sur la courbe double.

25. Nous venons de rappeler le résultat précédemment obtenu, à savoir que toutes les intégrales doubles de seconde espèce se ramènent par la soustraction d'une intégrale (16) à la forme (17), *où le degré du polynome* Q *est limité, ce polynome s'annulant sur la courbe double*.

Allons plus loin, en nous servant des résultats du Chapitre actuel. Nous avons un nombre fini d'intégrales

$$\iint \frac{R_h\, dx\, dy}{f'_z}$$

(le polynome R_h s'annulant sur la courbe double) auquel se ramènent toutes les autres. Une intégrale quelconque de seconde espèce

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

(le polynome P s'annulant sur la courbe double) sera alors de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx\, dy + \sum \lambda_h \iint \frac{R_h\, dx\, dy}{f'_z},$$

les λ étant des constantes. La forme de A et B nous est connue, car

$$\iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx\, dy$$

appartient au type étudié dans les sections précédentes. On aura donc (n° 16)

$$\frac{P - \Sigma \lambda_h R_h}{f'_z} = \frac{A_1 Q_1 + \ldots + A_{\rho-1} Q_{\rho-1}}{f'_z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right),$$

U et V étant des polynomes en x et z (à coefficients rationnels en y) s'annulant sur la courbe double.

Nous avons donc la conclusion suivante :

Toute intégrale double de seconde espèce

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

(P étant un polynome s'annulant sur la courbe double) *se ramène à un nombre limité d'intégrales de seconde espèce*

$$(18) \qquad \iint \frac{M_i(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

(le polynome M_i s'annulant sur la courbe double) *par la soustraction d'intégrales de la forme*

$$(19) \qquad \iint \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right) \right] dx\, dy,$$

U *et* V *étant des polynomes en x et z à coefficients rationnels en y et s'annulant sur la courbe double.*

On peut évidemment supposer qu'aucune combinaison linéaire des intégrales (18) n'est de la forme (19).

26. Supposons maintenant que l'intégrale double

$$(20) \qquad \iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

(P polynome s'annulant sur la courbe double) ne soit pas de seconde espèce. Cette intégrale aura $2p$ résidus relatifs à la ligne à l'infini de la surface. Admettons qu'on puisse trouver $2p$ intégrales doubles

$$J_1, \quad J_2, \quad \ldots, \quad J_{2p}$$

de la forme précédente, telles que le déterminant d'ordre $2p$ formé avec l'ensemble des résidus de ces intégrales soit différent de zéro. On pourra alors de l'intégrale (20) retrancher une intégrale convenable

$$A_1 J_1 + A_2 J_2 + \ldots + A_{2p} J_{2p}$$

les A étant des constantes), de telle sorte que la différence soit

une intégrale de seconde espèce. On a donc la conclusion suivante :

On peut trouver un certain nombre s d'intégrales de la forme (20), *soient*

$$I_i = \int\int \frac{P_i(x, y, z)}{f'_z}\, dx\, dy \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

les polynomes P_i *en* (x, y, z) *s'annulant sur la courbe double, de telle sorte que toute intégrale* (20) *soit susceptible de se mettre sous la forme*

$$\alpha_1 I_1 + \ldots + \alpha_s I_s + \int\int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right] dx\, dy,$$

les α *étant des constantes,* U *et* V *étant des polynomes en* x *et* z *à coefficients rationnels en* y, *s'annulant sur la courbe double.*

On peut d'ailleurs supposer que s est le nombre *minimum,* c'est-à-dire qu'aucune combinaison linéaire des I n'est susceptible de la forme (19).

27. Nous avons admis qu'on peut trouver une intégrale de la forme (20), dont les $2p$ résidus relatifs à la ligne à l'infini de la surface ont des valeurs arbitrairement données. Pour l'établir, considérons une intégrale abélienne arbitraire de seconde espèce de la courbe entre x et z,

$$f(x, y, z) = 0,$$

qui soit de la forme

$$(21) \qquad \int \frac{P(x, y, z)\, dx}{f'_z},$$

P étant un polynome en x, y et z, s'annulant sur la courbe double. Envisageons l'équation différentielle linéaire E d'ordre $2p$, relative aux $2p$ périodes de cette intégrale regardées comme fonctions de y; nous avons déjà bien des fois considéré cette équation E, qui a joué un rôle essentiel dans nos théories. Plaçons-nous dans le cas, qui est le cas général, *où cette équation n'admet pas comme intégrale un polynome en* y.

En désignant par $\omega(y)$ une période arbitraire de l'intégrale abé-



lienne (21), nous avons vu (Chap. VIII) que

$$\int \omega(y)\, dy,$$

prise autour du point à l'infini, était un résidu de l'intégrale double

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}.$$

Considérons $2p$ périodes distinctes

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}$$

de (21). On a les développements autour de $y = \infty$

$$\omega_i = \alpha_i^n y^n + \alpha_i^{n-1} y^{n-1} + \ldots + \frac{\alpha_i^{-1}}{y} + \frac{\alpha_i^{-2}}{y^2} + \ldots + \frac{\alpha_i^{-k}}{y^k} + \ldots.$$

Les $2p$ fonctions ω_i sont linéairement indépendantes. De plus, il n'y a pas de combinaisons linéaires des ω_i qui se réduisent à un polynome en y.

Il en résulte que, pour k pris suffisamment grand, les $2p$ expressions linéaires

$$(22) \qquad a_1 \alpha_i^{-k} + a_2 \alpha_i^{-(k-1)} + \ldots + a_k \alpha_i^{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p)$$

aux indéterminées

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k$$

sont linéairement indépendantes, car si, pour toute valeur de k, ces expressions linéaires n'étaient pas indépendantes, tous les déterminants d'ordre $2p$ formés avec les α_i^{-h} seraient nuls, et l'on pourrait former une combinaison linéaire des ω_i se réduisant à un polynome. Le nombre k étant pris suffisamment grand, envisageons l'intégrale double

$$\int\int \frac{\varphi(y)\, P(x, y, z)}{f'_z}\, dx\, dy,$$

où l'on pose

$$\varphi(y) = a_1 y^{k-1} + a_2 y^{k-2} + \ldots + a_{k-1} y + a_k,$$

les a étant des indéterminées. Les $2p$ résidus de cette intégrale double sont, au facteur $2\pi i$ près, les expressions (22). D'après

ce qui précède, on peut choisir les indéterminées a de manière que ces expressions aient telles valeurs que l'on veut, puisqu'elles sont linéairement indépendantes. Il est donc établi qu'*on peut trouver une intégrale double* (20) *ayant* $2p$ *résidus arbitrairement choisis.*

Cette remarque jouera dans la suite un rôle important [1].

---

[1] Nous nous sommes servis dans ce Chapitre du théorème fondamental de la page 241 où figure le nombre ρ. On peut faire, au sujet de l'analyse développée sur cette question au Chapitre IX, la remarque suivante, qui simplifie la démonstration de ce théorème. Il a été formé (page 239) une intégrale de différentielle totale

$$(\alpha) \qquad \int R\,dx + S\,dy.$$

Nous avons dit que l'intégrale (α) ne pouvait avoir d'autres courbes logarithmiques que les courbes

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_\lambda$$

et la courbe à l'infini sur la surface. En fait, la courbe à l'infini n'est pas une courbe logarithmique de l'intégrale. En effet, l'intégrale abélienne

$$(\beta) \qquad \int R\,dx$$

(y ayant une valeur fixe arbitraire $\bar{y}$), relative à la courbe entre x et z, $f(x, \bar{y}, z) = 0$ ne peut avoir, comme point singulier logarithmique à l'infini, que le point M (*voir* page 232); les $m-1$ autres points de la courbe à l'infini ne sont pas des points singuliers logarithmiques pour l'intégrale. Or les m périodes logarithmiques de (β) doivent être les mêmes pour les m points à l'infini de la courbe, puisque (α) est une intégrale différentielle totale, et que par suite pour les m points de rencontre de la ligne de l'infini de la surface avec le plan $y = \bar{y}$ la période logarithmique doit être la même. Il résulte de là que cette ligne à l'infini n'est pas une courbe logarithmique de l'intégrale. Ceci exige que l'on ait

$$c_1 d_1 + c_2 d_2 + \ldots + c_\lambda d_\lambda = 0,$$

en désignant par $d_1, d_2, \ldots, d_\lambda$ les degrés des courbes $C_1, C_2, \ldots C_\lambda$, et cette relation sera nécessairement une conséquence des relations de la page 236 entre les K et les c.



CHAPITRE XI.

SUR LES PÉRIODES DES INTÉGRALES DOUBLES ET LEURS RAPPORTS AVEC LA THÉORIE DES INTÉGRALES DOUBLES DE SECONDE ESPÈCE [1].

I. — Sur les périodes des intégrales doubles de première espèce.

1. Nous avons déjà dit un mot au Tome I de cet Ouvrage sur les périodes des intégrales doubles, et notre point de départ a été le suivant. Prenons l'intégrale double de *première espèce*

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

et envisageons la courbe entre x et z de genre p, pour y arbitraire

$$f(x, \bar{y}, z) = 0. \tag{1}$$

Les $2p$ périodes de l'intégrale (ici de première espèce)

$$\int \frac{Q(x, \bar{y}, z)\, dx}{f'_z} \tag{2}$$

sont des fonctions de y, satisfaisant à l'équation différentielle linéaire que nous appelons E, et dont les points critiques b correspondent aux points simples de la surface où le plan tangent est parallèle au plan des zx. Considérons un cycle Γ de la courbe (1),

---

[1] E. Picard, *Sur les périodes des intégrales doubles dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Comptes rendus,* 18 novembre et 23 décembre 1901, et *Annales de l'École Normale supérieure*, 1902). — *Sur les périodes des intégrales doubles et leurs rapports avec la théorie des intégrales doubles de seconde espèce* (*Comptes rendus*, t. CXXXVII, 1903, et *Annales de l'École Normale supérieure*, 1903).

se déformant avec y et revenant à sa position initiale quand y, ayant décrit un certain chemin fermé C, revient lui-même à son point de départ. On obtient évidemment de cette manière un cycle à deux dimensions, qui donnera naissance à une période de l'intégrale double. Le cycle Γ sera caractérisé par ce fait que la période correspondante

$$\omega(y)$$

de l'intégrale (2) revient à sa valeur initiale, quand y décrit la courbe C. Ces considérations généralisent celles que nous avons employées pour obtenir les *résidus* des intégrales doubles; dans ce cas, le cycle Γ se réduisait à un contour infiniment petit autour d'un pôle.

2. Nous allons étudier la forme analytique de l'intégrale

$$\int \omega(y)\, dy$$

prise le long du contour C. Cette étude nous fera connaître certaines expressions analytiques remarquables, qui nous conduiront d'elles-mêmes à généraliser le mode de génération des périodes de notre intégrale double.

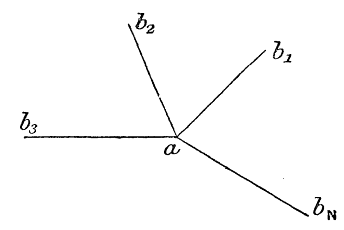
Désignons par

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_N$$

les points critiques de l'équation différentielle E (N désigne ici la *classe* de la surface).

Nous joignons ces points à un point a du plan de la variable y, et nous considérons les différents lacets ab_1, ab_2, ..., ab_N formés,

Fig. 15.



comme d'habitude, d'un cercle infiniment petit autour d'un point b et d'un chemin allant de a à ce cercle (*fig.* 15).

Pour chaque point critique $y = b$, l'équation fondamentale déterminante de E a une racine double. Cette racine double correspond (*voir* T. I, p. 95) à une intégrale holomorphe $\Omega(y)$, et une intégrale non holomorphe $\Omega'(y)$ contenant un terme logarithmique $\log(y - b)$, de telle sorte que l'on ait

$$\Omega'(y) = f(y) + \frac{1}{2\pi i}\,\Omega(y)\log(y - b),$$

$f(y)$ étant, comme $\Omega(y)$, holomorphe autour de $y = b$. Les $2p - 2$ autres intégrales, formant avec Ω et Ω' un système fondamental, sont holomorphes autour de $y = b$.

Ceci rappelé, tout chemin C partant de a et y revenant, se ramène à une somme de lacets parcourus dans un ordre quelconque. Désignons d'une manière générale par

$$\Omega_i(y)$$

la période de l'intégrale (2), holomorphe autour du point $y = b_i$, et qui correspond à la racine double : elle est parfaitement définie de b_i en a sur le lacet.

Une période quelconque $\omega(y)$ de l'intégrale (2), quand y tourne autour du point b_i, se reproduit à un terme additif près de la forme

$$m_i\Omega_i(y) \qquad (m_i \text{ étant un entier}),$$

comme il résulte immédiatement de la forme de la période appelée tout à l'heure d'une manière générale $\Omega'(y)$, toutes les autres périodes étant holomorphes autour de b_i.

Donc, quand y décrivant un chemin fermé C revient au point de départ, l'intégrale considérée $\omega(y)$ de l'équation linéaire E s'augmente d'une expression de la forme

$$\sum m_i\Omega_i(y),$$

la sommation s'étendant à un certain nombre de points b_i. Si l'intégrale ω revient à sa valeur initiale, on devra avoir

$$\sum m_i\Omega_i(y) = 0.$$

Quant à la valeur de l'intégrale

$$\int_C \omega(y)\,dy, \tag{3}$$

le long du contour C, elle est facile à calculer; sur le lacet ab_i, il reste, après suppression de termes se détruisant à l'aller et au retour,

$$m_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\, dy,$$

et, par suite, *la valeur de l'intégrale* (3) *est*

$$\sum m_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\, dy. \tag{4}$$

Dans cette expression $\Omega_i(y)$ est définie sans aucune ambiguïté le long du chemin $b_i a$. D'ailleurs l'expression (4) ne dépend pas du point choisi a, comme il résulte immédiatement de l'identité

$$\sum m_i \Omega_i(y) = 0. \tag{5}$$

3. Les considérations précédentes appellent donc notre attention sur les expressions de la forme (4), correspondant à une identité de la forme (5). Une question se pose d'elle-même :

Une expression (4), *l'identité* (5) *étant supposée satisfaite, peut-elle être envisagée comme une période de l'intégrale double*

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}?$$

Nous entendons par *période de l'intégrale double,* de la manière la plus générale, l'intégrale prise le long d'*un cycle à deux dimensions,* c'est-à-dire d'un *continuum* fermé à deux dimensions à chaque point duquel ne correspond qu'une seule valeur de (x, y, z).

La réponse à la question posée est affirmative, comme nous allons l'établir. Soit donc l'identité

$$m_1 \Omega_1(y) + \ldots + m_s \Omega_s(y) = 0 \qquad (\text{les } m \text{ étant entiers}), \tag{6}$$

entre un certain nombre de fonctions Ω, on va montrer *qu'il existe un certain cycle à deux dimensions, tel que la valeur de l'intégrale double*

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

prise le long de ce cycle est égale à

$$(7) \qquad m_1 \int_{b_1}^{a} \Omega_1(y)\,dy + \ldots + m_s \int_{b_s}^{a} \Omega_s(y)\,dy.$$

Cette valeur est d'ailleurs manifestement indépendante de la constante a.

Considérons l'intégrale

$$m_1 \Omega'_1(y)$$

de l'équation E, en désignant par Ω'_1 l'intégrale relative au point b_1 déjà envisagée au n° 1. Quand y partant de a décrit le lacet b_1, l'intégrale $m_1 \Omega'_1$ s'augmente de

$$m_1 \Omega_1(y).$$

Il faut interpréter ce fait analytique *au point de vue de la géométrie de situation*. Soient d'une manière générale sur la surface de Riemann entre x et z donnée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

pour la valeur y, Γ_1 le contour correspondant à $\Omega_1(y)$ et Γ'_1 le contour correspondant à Ω'_1. Partons du contour

$$m_1 \Gamma'^a_1$$

pour $y = a$; le cheminement de y se produisant, ce contour se déplace en se déformant, et, quand y revient en a, on a le contour

$$m_1 \Gamma'^a_1 + m_1 \Gamma^a_1.$$

Il est clair que, pendant la déformation, *on engendre ainsi une surface ouverte,* mais *avec le seul bord*

$$m_1 \Gamma^a_1$$

et la valeur de l'intégrale double correspondant à cette surface ouverte est

$$m_1 \int_{b_1}^{a} \Omega_1(y)\,dy.$$

De la même façon, *les différents autres termes de la somme* (7) *correspondront à des surfaces ouvertes* avec les bords

$$m_2 \Gamma^a_2, \quad \ldots, \quad m_s \Gamma^a_s,$$

Γ^a_i ayant la signification analogue à Γ^a_1 quand b_i remplace b_1.

Nous avons donc s surfaces ouvertes avec les s bords indiqués. D'autre part, pour y arbitraire, les s contours

$$m_1\Gamma_1, \quad m_2\Gamma_2, \quad \dots, \quad m_s\Gamma_s$$

limitent, sur la surface de Riemann,

$$f(x, y, z) = 0,$$

une certaine portion P de la surface, comme il résulte de l'identité (6) qui exprime que les s intégrales

$$\Omega_1(y), \quad \dots, \quad \Omega_s(y)$$

ne sont pas distinctes.

Considérons, en particulier, la portion P^a, sur la surface correspondant à $y = a$. *Cette portion* P^a, *avec les s surfaces ouvertes envisagées ci-dessus, forme une surface fermée, qui est un cycle à deux dimensions;* la valeur de l'intégrale double sur cette surface est précisément l'expression (7) donnée par les s surfaces ouvertes, puisque sur la portion P^a, correspondant à $y = a$, l'intégrale est nulle. *Le théorème énoncé est donc établi.*

Il est important de remarquer que nous n'avons pas à nous préoccuper de savoir si la portion P^a contient ou non des points à l'infini, puisque l'intégrale double dont nous sommes partis est de première espèce. Il en serait autrement pour une intégrale double qui deviendrait infinie à l'infini puisque l'intégrale suivant P_a pourrait n'avoir aucun sens. Nous parlerons de ce cas dans la section suivante.

4. On peut se demander si toutes les périodes de l'intégrale double peuvent être engendrées au moyen des cycles à deux dimensions que nous venons de considérer. Nous allons établir que tout cycle à dimensions, *situé tout entier à distance finie,* est susceptible de la génération précédente. Nous emploierons, à cet effet, quoique dans des circonstances plus compliquées, le même genre de raisonnements qu'à la page 58 du Tome I de cet Ouvrage, quand nous avons étudié les périodes d'une intégrale double de fonction rationnelle pour un continuum fermé à distance finie.

Concevons donc relativement à la fonction algébrique z de x



et y définie par

$$f(x, y, z) = 0$$

un cycle à deux dimensions situé à distance finie.

Posons

$$x = x_1 + ix_2, \qquad y = y_1 + iy_2;$$

toute surface à deux dimensions sera représentée par deux relations entre x_1, x_2, y_1 et y_2.

De même, le continuum critique C sera représenté dans l'espace à quatre dimensions réelles

$$(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

par deux relations entre les quatre lettres x_1, x_2, y_1 et y_2. Pour une valeur donnée à y_2, nous avons sur ce continuum un ensemble à une dimension de valeurs de x_1, x_2 et y_1, que l'on peut regarder comme représentant un certain nombre de courbes gauches α dans l'espace à trois dimensions

$$(x_1, x_2, y_1);$$

il faut d'ailleurs à chaque valeur de x_1, x_2, y_1, y_2 associer la valeur correspondante de z, de sorte que nous entendons par courbe α le lieu de points (x_1, x_2, y_1) pour une valeur de y_2 avec association des valeurs correspondantes de z.

Chaque plan

$$y_1 = \text{const.}$$

rencontre les courbes α en un certain nombre de points toujours en même nombre, à savoir : le nombre des points de rencontre de C avec un plan arbitraire parallèle au plan des zx.

Sauf pour certaines valeurs de y_2 en nombre fini, l'ensemble des courbes α ne présente pas de points multiples; les valeurs de y_2, pour lesquelles cet ensemble a un point multiple, correspondent aux coefficients de i dans les valeurs de y pour lesquelles le plan correspondant parallèle au plan des zx est tangent à la courbe C (et en même temps à la surface). Ces valeurs de y sont celles que nous avons constamment désignées par b, et qui ont joué dans toutes nos recherches un rôle capital. Pour les valeurs de y_2 correspondant au coefficient de i dans un des b,

deux courbes α auront *un* point commun, formant un point *double* pour l'ensemble des courbes α. Soit, pour la valeur b considérée

$$b = b_1 + ib_2;$$

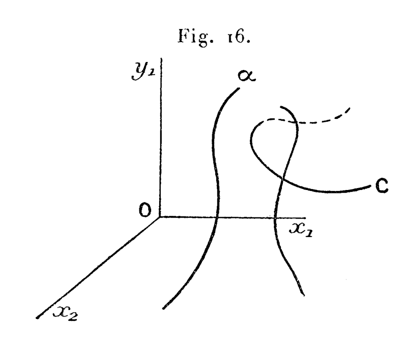
pour y_2 voisin de b_2 et un peu inférieur, les courbes α dans l'espace (x_1, x_2, y_1) n'ont pas de point double, mais deux branches passent très près l'une de l'autre. Pour $y_2 = b_2$, ces deux branches se rencontrent, et pour y_2 supérieur à b_2, elles ne se rencontrent pas, de sorte que, au moment du passage de y_2 par b_2, les deux branches se sont traversées; ce fait est à retenir pour ce qui va suivre.

Revenons à notre cycle S à deux dimensions. Cette surface étant tout entière à distance finie, il n'y aura de points de la surface que pour des valeurs de y_2, comprises entre deux limites a_1 et a_2 $(a_1 < a_2)$. Quand y_2 en croissant devient égale à a_1, une courbe fermée correspondante de S commence à paraître, et l'on peut la représenter dans l'espace (x_1, x_2, y_1).

Deux cas peuvent se présenter : ou bien cette courbe se réduit à un point, ou elle est la limite de deux courbes qui sont venues se confondre; dans toute autre hypothèse, la surface S ne serait pas fermée. On peut faire abstraction de la première hypothèse, car, si pour $y_2 = a_1$ la courbe se réduisait à un point, il arriverait que, pour y_2 arbitraire, la courbe correspondante, extension de ce point, ne tournerait pas autour des courbes α, et l'on pourrait, par une déformation continue, réduire à zéro, sans rencontrer aucune singularité, une portion fermée de la surface qui pourrait être supprimée. Nous avons donc, pour $y_2 = a_1$, une certaine courbe enveloppant quelques-unes des lignes α; quand y_2 croît, cette courbe se dédouble, et l'on a ainsi, pour y_2 arbitraire, des couples de courbes qui, pendant la variation continue de y_2, ne peuvent disparaître que deux à deux en venant à coïncider. Nous désignerons par C une de ces courbes, correspondant à une valeur d'ailleurs quelconque de y_2. Faisons croître y_2 depuis a_1; on aura ainsi une suite continue de courbes C, et la surface S pourra être ainsi décrite tout entière en faisant varier d'une manière continue y_2 (non pas nécessairement toujours dans le même sens) et en revenant en a_1 avec la position initiale de C.

5. Nous allons maintenant déformer S, en déformant chacune des courbes C. Figurons (*fig.* 16), pour une valeur de y_2, la courbe C et les lignes α dans l'espace (x_1, x_2, y_1).

Fig. 16.

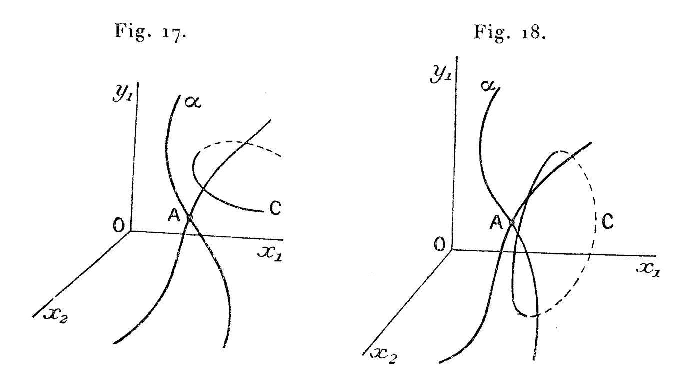


Tant que y_2 ne rencontre pas une valeur singulière désignée plus haut d'une manière générale par b_2, on peut faire glisser en quelque sorte la courbe C, sans rencontrer les lignes correspondantes α, de manière à lui faire prendre une position Γ dans le plan

$$y_1 = \text{K} \qquad \text{(K étant une constante fixe)},$$

cette opération se faisant elle-même d'une manière continue quand y_2 varie. Mais pour $y_2 = b_2$, on a deux lignes α, se rencontrant, et il peut arriver que l'on ne puisse plus déformer C en l'amenant dans le plan $y_1 = \text{K}$, sans traverser α. C'est ce qui arri-

Fig. 17. Fig. 18.



vera dans les figures 17 et 18, en supposant, dans la figure 17, que le plan $y_1 = \text{K}$ soit au-dessous du point double A de α. Les deux figures précédentes représentent d'ailleurs les deux circon-

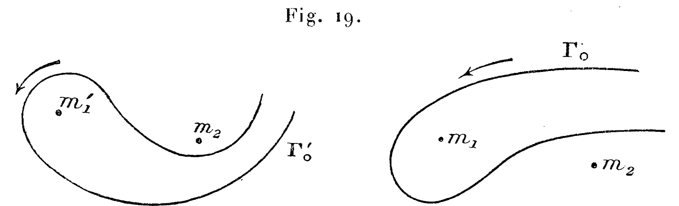
stances essentiellement différentes pouvant se présenter; les autres cas étant des combinaisons de ces deux cas.

Pour y_2 voisin de b_2, on pourra bien faire glisser C de manière à l'amener dans le plan $y_1 = K$, mais voici la circonstance qui va se présenter. L'opération qui amène C dans ce plan ne se fera pas d'une manière continue à l'instant du passage de y_2 par la valeur b_2. En d'autres termes, pour $y_2 = b_2 - \varepsilon$ et pour $y_2 = b_2 + \varepsilon'$ (ε et ε' très petits), la courbe C_0 et la courbe infiniment voisine C'_0 correspondant à ces deux valeurs de y_2 n'auront pas été ramenées dans le plan $y_1 = K$ à deux courbes infiniment rapprochées.

La raison en est que deux branches de la ligne α se sont traversées quand y_2 est passée par b_2. Il est facile de voir dans quelle dépendance sont les deux transformées Γ_0 et Γ'_0 de C_0 et C'_0 après les glissements les amenant dans le plan $y_1 = K$.

Prenons d'abord la figure 17. Le dessin suivant est fait dans le plan $y_1 = K$; on désigne par m_1 et m_2 les points de rencontre

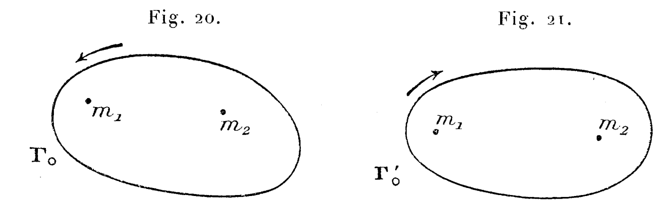
Fig. 19.



avec ce plan des lignes α qui correspondent à $y_2 = b_2 - \varepsilon$ et par m'_1 et m'_2 les points de rencontre avec le même plan des lignes α correspondant à $y_2 = b_2 + \varepsilon'$. L'un des dessins correspond à $y_2 = b_2 - \varepsilon$ et l'autre à $y_2 = b_2 + \varepsilon'$.

On voit de suite que le cycle Γ'_0 est équivalent au cycle Γ_0 plus le cycle correspondant à une courbe tournant autour de m_1 et m_2.

Fig. 20. Fig. 21.



Les circonstances sont différentes avec la figure 18. On a alors les dessins ci-dessus (*fig.* 20 et 21) : les contours Γ_0 et Γ'_0 sont les mêmes, mais le sens de la flèche est changé.

6. Ceci posé, suivons la déformation de la surface S obtenue en ramenant chaque courbe C dans le plan $y_1 = K$. Cette déformation se fait d'une manière continue, sauf quand y_2 passe par une valeur désignée par b_2 et que l'un ou l'autre des cas du paragraphe précédent se présente. Supposons que nous soyons dans le cas de la figure 17, et gardons les notations du paragraphe précédent. Dans la surface déformée les lignes Γ_0 et Γ'_0 qui correspondent à deux valeurs très voisines de y_2 ne sont pas très voisines l'une de l'autre; on passe d'une manière continue de l'une à l'autre en déformant Γ_0 de Γ_0 en C_0 dans l'espace $(x_1, x_2, y_1, b_2 - \varepsilon)$, puis en allant de C_0 en C'_0 sur notre surface initiale S, et enfin amenant C'_0 en Γ'_0 dans l'espace $(x_1, x_2, y_1, b_2 + \varepsilon')$. Or, on peut réaliser autrement et d'une manière équivalente ce passage de Γ_0 en Γ'_0. Considérons, à cet effet, le cycle Γ_0 qui est dans le continuum

$$(\mathrm{P}) \qquad y = K + i(b_2 - \varepsilon)$$

et qui est sur la surface de Riemann entre x et z

$$f(x, y, z) = 0.$$

Faisons partir y de la valeur ci-dessus, et faisons décrire à cette variable dans son plan un contour fermé autour du point b, dans un sens convenable, et en supposant que sur ce contour la valeur de y_2 s'éloigne peu de b_2. Le cycle Γ_0 se transformera, d'après ce que nous avons vu dans bien des circonstances, par cette circulation en un cycle ayant la forme de Γ'_0, et qui sera, si l'on veut, Γ'_0 dans l'espace $(x_1, x_2, y_1, b_2 - \varepsilon)$; la surface engendrée pendant ce déplacement augmentée de celle qui correspond au transport de la courbe Γ'_0 de l'espace $(x_1, x_2, y_1, b_2 - \varepsilon)$ à la courbe Γ'_0 de l'espace $(x_1, x_2, y_1, b_2 + \varepsilon')$. Ce second mode pour passer de Γ_0 à Γ'_0 est équivalent au premier, c'est-à-dire donne la même valeur pour l'intégrale double sur les surfaces correspondantes. Nous avons donc *fait disparaître la discontinuité dans la déformation de la surface obtenue* en déformant la courbe C en cycles dans le plan de la variable x pour

$$y = K + iy_2,$$

et, par suite, nous pouvons substituer à la surface S une surface connexe formée de lignes Γ, à la condition d'ajouter la portion

dont il vient d'être parlé et qui est elle-même formée de cycles correspondant à $y =$ const. De là résulte que nous n'avons à envisager, pour le calcul de la période, qu'une intégrale de la forme

$$\int \omega(y)\,dy$$

prise pour un chemin convenable de la variable y. Si donc, en décrivant notre surface cyclique S avec la courbe C, nous ne rencontrons, pour les valeurs singulières de y_2, que le cas de la figure 17, la période sera obtenue par l'intégrale précédente, où $\omega(y)$ est une période de

$$\int \frac{Q(x, y, z)\,dx}{f'_z},$$

prise le long d'un chemin fermé convenable, ce qui démontre bien le résultat énoncé et nous conduit aux formes étudiées au n° 3.

Les choses se présentent sous une forme un peu différente dans le cas de la figure 18. Il n'est pas possible, en effet, de trouver un chemin dans le plan de la variable y menant de Γ_0 à Γ'_0. Nous allons calculer directement la valeur de l'intégrale double prise le long de la surface engendrée par le déplacement de la courbe Γ_0 de l'espace $(x_1, x_2, y_1, b_2 - \varepsilon)$ à la courbe Γ'_0 du même espace, après avoir passé par les courbes C_0 et C'_0. Nous ne changerons pas la valeur de l'intégrale double si nous substituons à C_0 et C'_0 deux courbes de même forme mais très voisines de A, et les supposant respectivement dans les espaces

$$(x_1, x_2, y_1, b_2 - \varepsilon) \quad \text{et} \quad (x_1, x_2, y_1, b_2 + \varepsilon').$$

La surface en question pourra alors être engendrée en laissant d'abord y_2 égal à $b_2 - \varepsilon$ et faisant varier y_1 et déformant en maintenant Γ_0, de manière que, y_1 étant très voisin de b_1 (en posant comme plus haut $b = b_1 + ib_2$, et b_1 étant l'y_1 du point double A), la transformée Γ_1 de Γ_0 soit de dimensions très petites et très voisines de A, puis ensuite avec $y_2 = b_2 + \varepsilon'$, on aura une surface résultant de la déformation de Γ'_0 et se terminant à une courbe Γ'_1, avec y_1 très voisin de b_1, qui est de dimensions très petites et très voisine de A; outre ces deux surfaces, il y aura des surfaces de dimensions très petites reliant Γ_1 à C_1, puis C_1 à C'_1 et enfin C'_1 à Γ'_1.

L'intégrale prise le long des trois dernières surfaces est négligeable, c'est-à-dire qu'elle donne zéro quand les dimensions de C_1, C'_1, Γ_1 et Γ'_1 tendent vers zéro, et il reste comme valeur de notre intégrale sur la surface limite

$$2\int_{\lambda}^{b} \Omega(y)\,dy,$$

$\Omega(y)$ correspondant au cycle Γ (c'est la notation déjà employée), et en posant

$$\lambda = K + ib_2.$$

Les deux portions de l'intégrale ne se détruisent pas, il y a au contraire multiplication par *deux,* parce que le sens sur le contour a changé, comme l'indique la figure 18. En définitive, le passage de y_2 par b_2 amène le changement de signe de Ω, en même temps qu'il faut ajouter l'intégrale ci-dessus; il revient au même de dire que l'on intègre

$$\int \omega(y)\,dy$$

le long d'un chemin qui passe par le point singulier $y = b$, $\omega(y)$ arrivant au voisinage de ce point avec la détermination $\Omega(y)$; mais, après le passage de y par b, on doit changer le signe de $\omega(y)$.

On pourrait donner une forme analogue au résultat trouvé plus haut relatif à la figure 16, en disant que l'on prend l'intégrale

$$\int \omega(y)\,dy$$

le long d'un chemin passant par le point critique b; en ce point, $\omega(y)$ devient alors infinie (comme un logarithme), et, après le passage de y par b, on doit augmenter $\omega(y)$ de $\Omega(y)$.

En combinant les résultats précédents, nous voyons que l'intégrale double prise le long du cycle S peut s'obtenir de la manière suivante : Soit $\omega(y)$ une période convenable de l'intégrale

$$\int \frac{Q(x, y, z)\,dx}{f'_z},$$

on formera l'intégrale

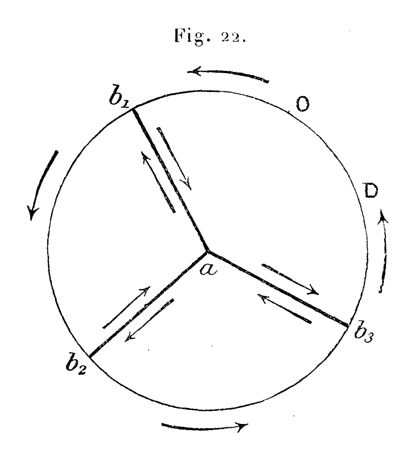
$$\int \omega(y)\,dy$$

dans le plan de la variable complexe y le long d'un chemin D pouvant passer par les points singuliers désignés d'une manière générale par b. Quand D traverse le point singulier b_i, on doit augmenter $\omega(y)$ de

$$\mu_i \Omega_i(y),$$

μ_i étant un entier positif ou négatif, et $\Omega_i(y)$ ayant la signification du n° 2. De plus, en revenant au point de départ O sur le chemin D, on doit retrouver la détermination initiale de $\omega(y)$, puisqu'on revient à la même courbe C sur la surface S. La valeur de l'intégrale est alors facile à calculer. Figurons le chemin D avec les trois points b_1, b_2, b_3 (*fig.* 22) pour fixer les idées et le point

Fig. 22.



de départ O. Soit, en outre, a un point quelconque dans le plan; traçons

$$ab_1, \quad ab_2, \quad ab_3,$$

que l'on va regarder comme des lignes doubles. Au lieu de prendre l'intégrale

$$\int \omega(y)\, dy$$

sur le contour D, on peut la prendre sur le contour

$$O\, b_1\, a\, b_1\, b_2\, a\, b_2\, b_3\, a\, b_3\, O,$$

en supposant que, aux points correspondants de ab_i et de $b_i a$, la différence des valeurs de $\omega(y)$ est $\mu_i \Omega_i(y)$, le saut brusque ayant

alors lieu en a. D'ailleurs, comme on doit retrouver la même valeur en o, il faut manifestement que l'on ait l'identité

$$\sum \Sigma \mu_i \Omega_i(a) = 0.$$

Enfin la valeur de l'intégrale sera

$$\sum \mu_i \int_a^{b_i} \Omega_i(y)\, dy.$$

Par suite, *toutes les périodes de notre intégrale double peuvent être obtenues au moyen des combinaisons envisagées au n° 3.* Le résultat énoncé au commencement du n° 4 est donc établi.

7. Dans la forme analytique que nous avons donnée aux périodes de l'intégrale double figurent les fonctions $\Omega(y)$ relatives à chaque point singulier.

On pourrait, sans parler de ces périodes particulières de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{Q(x, y, z)\, dx}{f'_z}, \tag{8}$$

donner encore la forme suivante aux périodes de l'intégrale double. Soit toujours a un point arbitrairement choisi; considérons une intégrale $\omega_i(y)$ de l'équation différentielle linéaire E relative aux périodes de (8), et supposons que y partant de a y revienne après avoir décrit un chemin C_i autour de b_i et avec la détermination $\omega'_i(y)$; on fait ainsi pour un certain nombre de points singuliers b. Supposons enfin que l'on ait l'identité

$$\sum \omega_i(y) = \sum \omega'_i(y). \tag{9}$$

Alors l'expression

$$\sum \int_{C_i} \omega_i(y)\, dy \tag{10}$$

est une période de l'intégrale double. Il est clair, d'après l'identité (9), que l'expression (10) ne dépend pas de a.

Dans tous les numéros précédents, nous avons supposé, comme il était permis, que la surface algébrique f avait une position

quelconque par rapport aux axes de coordonnées; dans ces conditions, les points singuliers b de l'équation différentielle linéaire E, qui a joué un rôle capital dans toutes nos recherches, possèdent des propriétés d'une remarquable simplicité qui nous ont été très utiles. Énonçons seulement pour le moment une remarque importante pour le cas, peu intéressant au point de vue théorique général, mais qui peut se rencontrer dans des applications particulières, où les axes de coordonnées auraient une position particulière par rapport à la surface. Les points singuliers de l'équation (E) peuvent être alors de nature plus compliquée, mais les expressions (10), sous la condition (9), sont encore évidemment des périodes de l'intégrale double. Toutefois, et c'est là le point que nous venons signaler, *tous les cycles à deux dimensions de la surface algébrique ne pourront pas toujours être engendrés de cette manière,* en ramenant à un seul plan $y = a$, contrairement au théorème que nous venons de démontrer plus haut, dans la démonstration duquel la nature simple des points singuliers b a joué un rôle. Nous le montrerons sur un exemple dans la section suivante.

8. Revenons aux périodes précédemment trouvées

$$\sum m_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\, dy$$

avec la condition

$$\sum m_i \Omega_i(y) = 0.$$

Elles se ramènent immédiatement à un nombre limité d'entre elles. Tout d'abord, parmi les $\Omega_i(y)$, il y en aura, en général, $2p$ qui sont linéairement indépendants. Ceci arrivera en particulier si l'équation E est irréductible (ce qui est le cas général). Supposons, en effet, que, parmi les $\Omega_i(y)$, il y en ait moins de $2p$ linéairement indépendants, soient

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_s \qquad (s < 2p)$$

et supposons tracées toujours dans le plan de la variable y les coupures allant de a aux points singuliers b (comme au n° 2). Considérons l'intégrale $\Omega_1(y)$, elle n'aura en a que s déterminations linéairement indépendantes, puisque la circulation autour

d'un lacet correspondant à b_i augmente simplement, d'une manière générale, $\omega(y)$ d'un multiple de $\Omega_i(y)$, et que, parmi ceux-ci, il n'y en a que s linéairement indépendantes. L'équation E aurait donc une intégrale qui n'aurait dans tout le plan que s déterminations linéairement indépendantes; elle serait donc réductible, contre l'hypothèse faite. Dans les généralités qui vont suivre, *il sera supposé qu'il y a* $2p$ *fonctions* Ω *linéairement indépendantes*.

Soient alors, pour fixer les idées,

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}$$

les Ω correspondant respectivement aux points critiques

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_{2p}$$

linéairement indépendants. Si h est supérieur à $2p$, on a nécessairement une identité

$$m_1^h\Omega_1 + \ldots + m_{2p}^h\Omega_{2p} + m_h\Omega_h = 0 \qquad (m_h \neq 0).$$

Envisageons alors les expressions

$$A_h = m_1^h\int_{b_1}^a \Omega_1(y)\,dy + \ldots + m_{2p}^h\int_{b_{2p}}^a \Omega_{2p}(y)\,dy + m_h\int_{b_h}^a \Omega_h(y)\,dy$$
$$(h = 2p+1, \ldots, N),$$

qui sont des périodes. Or, si P est une période de l'intégrale double, on a

$$P = \sum \mu_i \int_{b_i}^a \Omega_i(y)\,dy \qquad \left[\text{avec } \sum \mu_i\Omega_i(y) = 0\right];$$

on pourra manifestement trouver une relation entre les P et les A, par l'élimination des quantités

$$\int_{b_h}^a \Omega_h(y)\,dy \qquad (h = 2p+1, \ldots, N),$$

ce qui conduit à une relation de la forme

$$\lambda P + \sum_{h=2p+1}^{h=N} \lambda_h A_h + \sum_{\nu=1}^{\nu=2p} \delta_\nu \int_b^a \Omega_\nu(y)\,dy = 0,$$

λ, les λ_h et les δ_ν étant des entiers, et λ étant différent de zéro. Puisque P et les A ne dépendent pas de a, il en sera de même de

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=2p} \delta_\nu \int_{b_\nu}^{a} \Omega_\nu(y)\,dy,$$

ce qui entraîne la relation

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=2p} \delta_\nu \Omega_\nu(y) = 0.$$

Mais les $\Omega_\nu(y)$ (pour $\nu = 1, 2, \ldots, 2p$) sont linéairement indépendants par hypothèse; par suite, on aura

$$\delta_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Il résulte de là que, entre P et les A, il y a une relation homogène et linéaire à coefficients entiers. Donc, nous sommes déjà assurés que *le nombre des périodes est au plus égal au nombre des quantités* A, *c'est-à-dire* $N - 2p$.

9. Nous pouvons aller plus loin. Il existe des relations homogènes et linéaires à coefficients entiers entre les A, d'où résulte une diminution du nombre des périodes. Puisque l'intégrale double dont nous sommes partis est de première espèce, toutes les solutions de l'équation E, désignées d'une manière générale par $\omega(y)$, ont leurs résidus nuls pour le point à l'infini. Soit alors $\omega(y)$ une solution arbitraire de l'équation E; en prenant

$$\int \omega(y)\,dy$$

le long de l'ensemble des lacets $b_1, b_2, \ldots, b_N$, on obtiendra le même résultat que pour un contour autour du point à l'infini, c'est-à-dire zéro. La valeur de l'intégrale précédente est manifestement de la forme

$$\mu_1 \int_{b_1}^{a} \Omega_1(y)\,dy + \ldots + \mu_N \int_{b_N}^{a} \Omega_N(y)\,dy.$$

En l'égalant à zéro, on obtient une relation homogène et linéaire à coefficients entiers entre les A. En prenant pour $\omega(y)$ succes-

sivement $2p$ solutions indépendantes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$ de E, on obtient $2p$ relations de cette nature.

La valeur de l'intégrale

$$\int \omega_h(y)\,dy$$

autour du point ∞, exprimée en fonction des A, prend la forme

$$\nu_{2p+1}^h A_{2p+1} + \ldots + \nu_N^h A_N,$$

les ν étant des nombres rationnels. On obtiendra donc les $2p$ relations

$$(\Sigma) \qquad \nu_{2p+1}^h A_{2p+1} + \ldots + \nu_N^h A_N = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Une question importante se pose immédiatement : *ces $2p$ relations Σ sont-elles distinctes,* c'est-à-dire peut-on en tirer $2p$ des A en fonction des $N - 4p$ autres? Nous allons démontrer que *la réponse est affirmative,* en raisonnant comme à la page 328.

Considérons, à cet effet, une intégrale arbitraire de seconde espèce

$$\int \frac{P(x, y, z)\,dx}{f'_z}$$

(P polynome en x, y et z s'annulant sur la courbe double) de la courbe entre x et z représentée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

Les périodes de cette intégrale sont des fonctions de y, satisfaisant à une équation linéaire du type E. Les $2p$ déterminations ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_{2p}$ linéairement indépendantes sont uniformes à l'infini, et l'on a par exemple les développements

$$\omega_h = \alpha_h^n y^n + \alpha_h^{n-1} y^{n-1} + \ldots + \frac{\alpha_h^{-1}}{y} + \ldots + \frac{\alpha_h^{-k}}{y^k} + \ldots$$

autour de $y = \infty$. Comme nous l'avons vu, les $2p$ *résidus* de l'intégrale double

$$(11) \qquad \iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

relatifs à la courbe à l'infini de la surface, sont les valeurs de l'in-

tégrale

$$\int \omega(y)\,dy$$

autour du point à l'infini; ils ont donc pour valeur

$$2\pi i \alpha_h^{-1}.$$

Nous avons vu (p. 328) que, en nous plaçant dans un cas très général, on pourra certainement déterminer un polynome

$$\varphi(y) = a_1 y^{k-1} + a_2 y^{k-2} + \ldots + a_k,$$

tel que les $2p$ résidus de l'intégrale double

$$\int\int \frac{\varphi(y)\,P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

aient des valeurs arbitrairement choisies.

Ses $2p$ résidus par rapport à la courbe à l'infini de la surface algébrique seront donc linéairement indépendants au point de vue arithmétique.

Désignons alors par

$$(12) \qquad \int\int \frac{Q^1(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

(Q^1 polynome en x, y, z, s'annulant sur la courbe double), une intégrale double jouissant de la propriété ci-dessus. Elle va nous servir à démontrer que les $2p$ relations Σ sont distinctes.

10. Les équations différentielles linéaires E et E^1 relatives aux périodes de l'intégrale abélienne (8)

$$\int \frac{Q(x, y, z)\,dx}{f'_z}$$

et de l'intégrale

$$\int \frac{Q^1(x, y, z)\,dx}{f'_z}$$

ont même groupe.

Désignons par

$$A^1_{2p+1}, \quad \ldots, \quad A^1_N$$

les expressions formées avec l'intégrale (12) de la même manière que

les A des n°s 7 et 8 avec l'intégrale (2). Les $2p$ résidus de (12), relatifs à la courbe à l'infini, seront égaux à

$$(13) \qquad \nu_{2p+1}^h A_{2p+1}^1 + \ldots + \nu_N^h A_N^1 \qquad (h = 1, 2, \ldots, 2p),$$

les nombres rationnels ν étant les mêmes qu'au n° 9, puisque les groupes des équations différentielles linéaires E et E' sont les mêmes; désignons par π_h l'expression (13).

Nous allons voir de suite que les $2p$ relations Σ du n° 9 sont distinctes. Si, en effet, celles-ci ne pouvaient être résolues par rapport à $2p$ des A, on pourrait trouver des entiers k_h (non tous nuls) tels que l'on ait

$$\sum_{h=1}^{h=2p} k_h (\nu_{2p+1}^h A_{2p+1} + \ldots + \nu_N^h A_N) = 0$$

identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les lettres A. Il en résulte que l'on aurait

$$\sum k_h \pi_h = 0,$$

ce qui est contre l'hypothèse que les π_h ne sont liés par aucune relation homogène et linéaire à coefficients entiers.

La réponse à la question posée au numéro précédent est donc bien affirmative. Par suite, *le nombre des périodes de notre intégrale double de première espèce est au plus*

$$N - 4p,$$

puisque, entre les $N - 2p$ périodes A, il existe $2p$ relations *distinctes* homogènes et linéaires à coefficients entiers.

La question qui se poserait maintenant serait la recherche du nombre des périodes, *distinctes* de l'intégrale double *la plus générale* de première espèce d'une surface donnée. Mais c'est une question que nous n'aborderons pas en ce moment et c'est dans une tout autre direction que nous allons nous engager.

Nous allons voir dans les sections suivantes que c'est la combinaison

$$N - 4p - (m - 1)$$

qui est véritablement intéressante, et nous trouverons une rela-

tion remarquable entre les deux nombres ρ_0 et ρ et la combinaison précédente.

II. — Généralisation des résultats précédents; sur certains cycles à deux dimensions de la surface, situés à distance finie.

11. Nous sommes, dans la section précédente, partis d'une intégrale double de première espèce. Que deviennent les considérations, dont nous avons fait usage, quand, au lieu d'une intégrale de première espèce, on considère une intégrale double quelconque de la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

$P(x, y, z)$ étant un polynome quelconque s'annulant sur la courbe double. Les périodes de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{P(x, y, z)\, dx}{f'_z}$$

relative à la courbe $f(x, y, z) = 0$ entre x et z sont alors des fonctions de y. Ces périodes sont au nombre de

$$2p + m - 1$$

et satisfont à une équation linéaire E'. Parmi ces périodes, $m - 1$ correspondent aux points à l'infini et sont des polynomes en y (*voir* page 217 de ce Volume). Ainsi, l'équation E' d'ordre $2p + m - 1$ admet comme solutions $m - 1$ polynomes $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_m$, qui n'existaient pas tout à l'heure pour l'équation E.

En chacun des points singuliers existe toujours une intégrale Ω avec les mêmes propriétés, et si entre $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_s$ il existe une relation

$$m_1\Omega_1 + \ldots + m_s\Omega_s = 0 \qquad \text{(les } m \text{ entiers)},$$

l'expression

$$m_1 \int_{b_1}^{a} \Omega_1\, dy + m_2 \int_{b_2}^{a} \Omega_2\, dy + \ldots + m_s \int_{b_s}^{a} \Omega_s\, dy$$

ne dépendra pas de a. Il pourrait arriver que la portion P^a de la

surface de Riemann correspondant à $f(x, a, z) = 0$ (*voir* n° 3), limitée par les bords

$$m_1 \Gamma_1^a, \quad \ldots, \quad m_s \Gamma_s^a,$$

contînt un ou plusieurs points à l'infini; dans ce cas, l'intégrale double n'aurait pas de sens à cause des points à l'infini, mais l'expression précédente n'en aurait pas moins un sens.

Faisons maintenant l'hypothèse, correspondant au cas général [1], *que pour une intégrale arbitraire de la forme indiquée il y ait* $2p + m - 1$ *fonctions* $\Omega(y)$ *linéairement indépendantes,* soient

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p+m-1}$$

correspondant respectivement aux points singuliers b de même indice; elles formeront un système fondamental de l'équation différentielle linéaire E'. Envisageons une autre lettre Ω, soit Ω_s, où s est supérieur à $2p + m - 1$. On aura la relation identique

$$(14) \qquad m_1 \Omega_1 + \ldots + m_{2p+m-1} \Omega_{2p+m-1} + m_s \Omega_s = 0,$$

et l'expression correspondante, indépendante de a,

$$(15) \qquad m_1 \int_{b_1}^{a} \Omega_1(y)\, dy + \ldots + m_s \int_{b_s}^{a} \Omega_s(y)\, dy.$$

Il est facile de voir que les contours

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \ldots, \quad \Gamma_{2p+m-1}, \quad \Gamma_s$$

limitent, sur la surface de Riemann $f(x, y, z) = 0$, une portion de surface ne comprenant pas de points à l'infini, et, par suite, l'expression (15) est une période correspondant à un cycle à distance finie. Pour le démontrer, rappelons que, sur une surface de Riemann à m feuillets, on peut tracer $2p + m - 1$ contours à regarder comme distincts, si dans la déformation ces contours doivent nécessairement rester à distance finie, et que tout autre contour peut se ramener à une somme de ceux-là, les déformations se faisant toujours sans passer par l'infini.

---

(1) Dans tout ce qui va suivre cette condition sera supposée satisfaite. Nous la discuterons dans la Section IV de ce Chapitre.

Les contours

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \ldots, \quad \Gamma_{2p+m-1}$$

répondent bien à ces conditions puisque les $2p+m-1$ fonctions

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p+m-1}$$

sont linéairement indépendantes. Ensuite, tout autre contour Γ_s (ou un de ses multiples) peut se ramener à une combinaison des Γ précédents, sans passer par l'infini. Donc nous aurons sur la surface de Riemann une portion P, n'ayant pas de points à l'infini et limitée par

$$m_1\Gamma_1, \quad m_2\Gamma_2, \quad \ldots, \quad m_{2p+m-1}\Gamma_{2p+m-1}, \quad m_s\Gamma_s;$$

cette portion P adjointe aux $2p+m$ surfaces *ouvertes,* que nous avons fait correspondre aux contours précédents, nous donnera le cycle fermé à deux dimensions, *tout entier à distance finie,* qui donne la période (15), comme nous voulions l'établir. Nous obtenons donc de cette manière

$$N - 2p - (m-1)$$

périodes pour notre intégrale double.

La théorie développée plus haut (n° 8) a ici son analogue. Toute période P de l'intégrale double correspondant à un cycle, situé à distance finie, est encore de la forme

$$\sum \mu_k \int_{b_k}^{a} \Omega_k(y)\,dy$$

avec l'identité

$$\sum \mu_k \Omega_k(y) = 0.$$

A chaque valeur s plus grande que $2p+m-1$ correspond, d'après ce qui précède, une période P_s, et il y a entre P et les P_s une relation homogène et linéaire à coefficients entiers.

12. Nous avons considéré l'intégrale double

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z} \tag{16}$$

où P est un polynome quelconque s'annulant sur la courbe double.

Nous nous rapprocherons des résultats obtenus dans la section précédente, si nous supposons que l'intégrale abélienne

$$(17) \qquad \int \frac{P(x, y, z)}{f'_z},$$

relative à la courbe $f(x, y, z) = 0$ entre x et z, *est de seconde espèce*. L'équation E' est alors seulement d'ordre $2p$, et nous avons de nouveau

$$N - 2p,$$

expressions correspondant à $2p+1$ fonctions Ω. A la vérité, elles ne peuvent être toutes considérées comme *des périodes,* à cause des points à l'infini du cycle correspondant, à moins que l'on ne veuille élargir le sens du mot *période.*

Il résulte de ce que nous avons dit au numéro précédent que, pour $m-1$ des $N-2p$ expressions trouvées, le cycle correspondant s'étend à l'infini, de telle sorte que l'on ne peut pas dire en général que l'intégrale double prise sur ce cycle ait un sens.

Un cas particulier n'est pas sans intérêt.

Supposons que l'intégrale abélienne (17) soit de *première* espèce. Alors il n'y a plus aucune difficulté relative aux points à l'infini, et les $N-2p$ cycles à deux dimensions conduisent à une intégrale double ayant un sens déterminé. Parmi les $N-2p$ valeurs de ces intégrales, il y en a $2p$ qui sont les résidus de l'intégrale double par rapport à la courbe à l'infini de la surface. Nous avons rappelé à ce sujet (n° 9) les résultats de la page 217, d'après lesquels ces résidus sont les valeurs de l'intégrale

$$\int \omega(y)\, dy$$

autour du point ∞.

13. Revenons au cas général du n° 11. *Les* $N-2p-(m-1)$ *périodes, que nous avons trouvées, sont-elles distinctes?*

Nous allons démontrer que ces périodes sont distinctes, c'est-à-dire ne sont liées par aucune relation homogène et linéaire à coefficients entiers, si l'*intégrale double*

$$(18) \qquad \iint \frac{P(x, y, z)}{f'_z}\, dx\, dy$$

est arbitraire (P étant toujours un polynome s'annulant sur la courbe double). Tout d'abord, dans une telle intégrale double, on peut, comme on l'a vu (p. 327), supposer le degré du polynome P limité, puisque par la soustraction d'une expression de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right), \tag{19}$$

U et V étant des polynomes en x, z à coefficients rationnels en y (s'annulant sur la courbe double), on peut limiter le degré de P, et que dans la nouvelle intégrale les périodes seront les mêmes (pour ce point *voir* la section suivante de ce Chapitre). Soit alors l'intégrale double (18), ainsi réduite, renfermant s paramètres essentiellement distincts $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, c'est-à-dire telle que, quand les α ne sont pas tous nuls, elle ne se réduit pas à la forme (19).

Admettons maintenant que les périodes trouvées de (18) soient liées par une relation homogène et linéaire à coefficients entiers. Il est presque évident que ces coefficients entiers ne varieront pas avec les paramètres α qui sont susceptibles de variation continue. Pour le voir bien nettement, désignons par

$$P_1^1,\quad P_1^2,\quad \ldots,\quad P_1^\mu \qquad [\mu = N-2p-(m-1)]$$

les périodes de (18) quand on fait $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0$, et d'une manière générale par

$$P_i^1,\quad P_i^2,\quad \ldots,\quad P_i^\mu$$

les périodes quand $\alpha_i = 1$, les autres α étant nuls.

Les $P_i^1, P_i^2, \ldots, P_i^\mu$, pour une valeur fixe de i, ne seront pas nulles à la fois, car alors l'intégrale correspondante à $\alpha_i = 1$, les autres α étant nuls, n'aurait pas de périodes et serait par suite réductible à la forme (19), comme il sera démontré dans la section suivante.

Si les périodes de (18) ne sont pas distinctes, on aura, par hypothèse, quelles que soient les constantes arbitraires α,

$$M_1(\alpha_1 P_1^1+\alpha_2 P_2^1+\ldots+\alpha_s P_s^1)+\ldots+M_\mu(\alpha_1 P_1^\mu+\alpha_2 P_2^\mu+\ldots+\alpha_s P_s^\mu)=0,$$

les M étant des entiers qui ne sont pas tous nuls. Les P sont des nombres fixes; les entiers M pourraient-ils dépendre des variables continues α? Donnons à α des valeurs déterminées, mais arbi-

trairement choisies. On a l'égalité ci-dessus. Il faudra nécessairement que tous les coefficients des α soient nuls, c'est-à-dire que

$$M_1 P_i^1 + M_2 P_i^2 + \ldots + M_\mu P_i^\mu = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

En effet, dans le cas contraire, on pourrait exprimer un des α à l'aide des autres et des quantités P; or, ceci est impossible, car on peut certainement trouver s nombres irrationnels α, tels qu'aucun d'eux ne soit susceptible de s'exprimer rationnellement à l'aide des autres et de nombres déterminés P (en nombre fini). De là résulte que la relation supposée entre les périodes de (18) est toujours la même, quelle que soit cette intégrale double.

Envisageons alors une intégrale déterminée, d'ailleurs prise arbitrairement, du type (18). En conservant aux Ω la même signification que dans tous les numéros précédents, une relation entre ces périodes se traduirait par une égalité de la forme

$$(20) \qquad m_1 \int_{b_1}^{a} \Omega_1(y)\, dy + \ldots + m_N \int_{b_N}^{a} \Omega_N(y)\, dy = 0,$$

les m étant des entiers qui ne sont pas tous nuls [1].

Supposons alors qu'au lieu de l'intégrale (18), nous partions de l'intégrale

$$(21) \qquad \int\int \frac{\varphi(y)\, P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

$\varphi(y)$ étant un polynome en y. D'après ce qui précède, nous aurons, quel que soit ce polynome, la relation

$$m_1 \int_{b_1}^{a} \varphi(y)\Omega_1(y)\, dy + \ldots + m_N \int_{b_N}^{a} \varphi(y)\Omega_N(y)\, dy = 0$$

avec les mêmes entiers m que dans la relation (20).

Ainsi, en changeant seulement un peu les notations, on aurait (*fig.* 23) des fonctions déterminées $B_1(y), \ldots, B_N(y)$, holo-

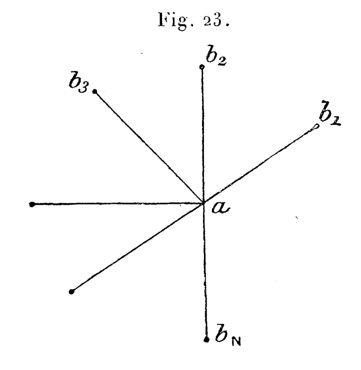
---

[1] Il est essentiel de remarquer qu'aucun des $\Omega_i(y)$ n'est identiquement nul, comme on le reconnaît en calculant $\Omega_i(b)$ qui est différent certainement de zéro, si, comme on peut le supposer, le polynome $P(x, y, z)$ ne s'annule pas aux points de la surface f où le plan tangent est parallèle au plan des zx.

morphes respectivement de a en b_1, de a en b_2, ..., de a en b_N (dont la somme est d'ailleurs identiquement nulle et qui ne sont pas toutes nulles), avec la relation,

$$\int_{b_1}^{a} \varphi(y) B_1(y)\, dy + \ldots + \int_{b_N}^{a} \varphi(y) B_N(y)\, dy = 0,$$

Fig. 23.



qui aurait lieu, *quel que soit le polynome* $\varphi(y)$. Il est aisé de voir que cela est impossible. Ceci entraînerait en effet les relations en nombre infini

$$\text{(R)} \qquad \int_{b_1}^{a} y^m B_1(y)\, dy + \ldots + \int_{b_N}^{a} y^m B_N(y)\, dy = 0$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Or, envisageons la somme

$$\text{(22)} \qquad \int_{b_1}^{a} \frac{B_1(y)}{y-x}\, dy + \ldots + \int_{b_N}^{a} \frac{B_N(y)}{y-x}\, dy,$$

où x est une variable arbitraire, correspondant à un point non situé sur les courbes d'intégration ab_1, ..., ab_N. Il est certain que la somme précédente représente une fonction de x, *qui n'est pas identiquement nulle*. En effet, d'après une théorie élémentaire, la fonction de x

$$\int_{b_h}^{a} \frac{B_h(y)}{y-x}\, dy$$

éprouve l'accroissement

$$2\pi i B_h(x)$$

quand le point x va d'un bord à l'autre de la coupure $b_h a$.

Ceci posé, pour x très grand, on peut développer l'expression (22) suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$, et les coefficients des différentes puissances de $\frac{1}{x}$ sont précisément les premiers membres des relations (R). L'expression (22) serait donc identiquement nulle, ce qui est contradictoire. *Le théorème est donc démontré.*

14. Parmi les $N - 2p - (m - 1)$ périodes distinctes que nous venons de trouver, il y en a $2p$ qui sont les résidus de l'intégrale double relatifs à la ligne à l'infini de la surface; ces résidus correspondent à l'intégrale

$$\int \omega(y)\,dy$$

prise autour du point ∞, en prenant pour $\omega(y)$, $2p$ intégrales de l'équation E' formant un système fondamental avec les $m - 1$ polynomes désignés par π au n° 11. Si l'intégrale double est arbitraire, ces $2p$ résidus sont certainement distincts; on le démontre en raisonnant comme au n° 9.

Nous concluons de là, qu'*en ne comptant pas les périodes correspondant aux résidus relatifs à la courbe à l'infini de la surface, nous avons*

$$N - 4p - (m - 1)$$

périodes distinctes correspondant à des cycles à distance finie.

En particulier, envisageons une intégrale double générale *de seconde espèce,* du type des intégrales précédentes,

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z};$$

comme cette intégrale, étant de seconde espèce, n'a pas de résidus, *le nombre de ses périodes correspondant à des cycles à distance finie est égal à*

$$N - 4p - (m - 1).$$

15. Dans tout ce qui précède, il a été essentiellement supposé que la surface occupait une position arbitraire par rapport aux axes; d'une manière plus précise, les plans tangents à la surface, parallèles au plan des zx, correspondent à des valeurs $y = b$ qui

sont des points singuliers de l'équation différentielle E′ jouissant des propriétés très simples sur lesquelles nous nous sommes appuyés. Nous avons déjà énoncé au n° 7 la remarque, que les choses seraient moins simples si la surface avait une position particulière par rapport aux axes.

Vérifions-le sur la surface

$$(\Sigma) \qquad x^3+y^3+z^3=1,$$

qui nous donnera d'ailleurs l'occasion d'exemples d'une autre nature particulièrement instructifs ([1]). Envisageons la courbe entre x et z représentée par l'équation précédente. Nous avons, pour cette courbe, deux cycles Γ_1 et Γ_2; en faisant décrire à y dans son plan un chemin fermé convenable, nous ramenons Γ_1 et Γ_2 à leurs positions initiales, et ainsi se trouvent engendrés *deux* cycles à deux dimensions pour Σ situés à distance finie.

Les points critiques relatifs à y sont ici les trois racines de

$$y^3=1,$$

mais ces points singuliers ne sont pas de la nature de ceux que nous avons rencontrés dans le cas général. On ne trouve ici que *deux* cycles à deux dimensions. D'ailleurs ces cycles existent bien effectivement, je veux dire ne se ramènent pas à zéro. Envisageons en effet l'intégrale double

$$\iint \frac{x\,dx\,dy}{z},$$

qu'on vérifie aisément être de seconde espèce, ce que nous allons retrouver d'ailleurs plus bas. Calculons sa valeur le long du cycle précédent. Posons à cet effet

$$x=\sqrt[3]{1-y^3}.t,$$

d'où se déduit

$$z=\sqrt[3]{1-y^3}.\sqrt[3]{1-t^3}.$$

L'intégrale double devient alors

$$\iint \sqrt[3]{1-y^3}.\frac{t}{\sqrt[3]{1-t^3}}\,dy\,dt.$$

([1]) E. Picard, *Sur les périodes d'une intégrale double de fraction rationnelle* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1903).

Sous cette forme, les périodes sont calculées de suite. En effet, désignons par ω et $\omega\varepsilon$ des périodes de l'intégrale simple

$$\int \sqrt[3]{1-y^3}\,.\,dy,$$

et par Ω et $\Omega\varepsilon$ les périodes de l'intégrale simple

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt[3]{1-t^3}}.$$

Nous aurons pour périodes de l'intégrale double correspondant aux deux cycles à deux dimensions indiqués plus haut

$$\omega\Omega \quad \text{et} \quad \omega\Omega\varepsilon$$

($\varepsilon =$ racine cubique imaginaire de l'unité); ces expressions étant différentes de zéro, les deux cycles existent effectivement.

En permutant x et y on a deux autres cycles à deux dimensions, et l'on peut montrer qu'ils ne se ramènent pas aux deux premiers. En effet, l'intégrale double

$$\iint \frac{y\,dx\,dy}{z}$$

prise le long de l'un ou l'autre des deux premiers cycles est nulle, puisque l'intégrale double exprimée à l'aide de y et t devient ici :

$$\int\int y\,dy\,\frac{dt}{\sqrt[3]{1-t^3}},$$

qui est nulle le long des cycles à deux dimensions de la première catégorie. Au contraire, en considérant l'intégrale double

$$\iint \frac{y\,dx\,dy}{z},$$

le long des cycles de la seconde catégorie, on aura des valeurs différentes de zéro. Par suite, tous les cycles à deux dimensions ne peuvent être formés en faisant la réduction avec un plan $y = a$, comme nous voulions le montrer. Mais ceci n'est pas en opposition avec le théorème général démontré au n° 6, car les plans

$$y = \text{const.}$$

occupent une position *spéciale* par rapport à la surface.

16. Il sera intéressant de faire, sur la surface

$$(\Sigma) \qquad x^3 + y^3 + z^3 = 1,$$

une vérification du théorème général du n° **14** sur le nombre des périodes d'une intégrale double générale *de seconde espèce* correspondant à des cycles à distance finie.

Pour une surface générale du troisième degré, on a

$$m = 3, \qquad N = 12, \qquad p = 1;$$

l'expression

$$N - 4p - (m - 1)$$

sera ici égale à 6. Nous devons donc pouvoir trouver *six* périodes distinctes pour une intégrale double arbitraire de seconde espèce de la surface (Σ). Or, envisageons l'intégrale double

$$(23) \qquad \iint \frac{Axy + Byz + Czx}{z^2}\, dx\, dy,$$

A, B, C étant trois constantes arbitraires.

Nous montrerons d'abord que cette intégrale est de seconde espèce. Prenons par exemple,

$$\iint \frac{y}{z}\, dx\, dy \qquad (\text{qui correspond à } A = C = 0).$$

L'identité

$$\iint \frac{y\, dx\, dy}{z} = \frac{1}{2} \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{xy^4}{(1-y^3)z}\right] \right\} dx\, dy$$

rend manifeste que l'intégrale est de seconde espèce. Les deux autres intégrales se déduisant de celle que nous venons d'examiner par des permutations de lettres, il n'est pas douteux que l'intégrale (23) est de seconde espèce. La possibilité de cette permutation est évidente pour

$$\iint \frac{x}{z}\, dx\, dy \qquad (A = B = 0).$$

Pour la troisième intégrale

$$\iint \frac{xy}{z^2}\, dx\, dy,$$

il suffit de remarquer que l'élément

$$\frac{dx\,dy}{z^2}$$

peut se remplacer par

$$\frac{dy\,dz}{x^2},$$

et nous avons par suite l'intégrale

$$\iint \frac{y}{x}\,dy\,dz,$$

qui est de même type que les précédentes.

Calculons maintenant les périodes de (23). La première catégorie de cycles à deux dimensions, dont nous avons parlé au n° 15, donne les périodes

$$(24) \qquad C\omega\Omega, \quad C\omega\Omega\varepsilon,$$

les intégrales doubles ayant pour coefficients A et B, donnant des périodes correspondantes égales à zéro.

Les cycles de la seconde catégorie (pour lesquels la réduction est faite avec un plan $x = a$) donneront, dans les mêmes conditions, les périodes

$$(25) \qquad B\omega\Omega, \quad B\omega\Omega\varepsilon.$$

Enfin, on pourra encore former deux autres cycles, en faisant la réduction avec un plan $z = a$, et cela toujours de la même manière. Ils donneront les périodes

$$(26) \qquad A\omega\Omega, \quad A\omega\Omega\varepsilon.$$

Par suite, nous avons formé, pour l'intégrale double de seconde espèce (23), *six périodes distinctes correspondant à des cycles à deux dimensions situés à distance finie, représentées par les expressions* (24), (25), (26).

III. — Comparaison entre le nombre des périodes des intégrales doubles de seconde espèce et le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce; relation fondamentale entre ces deux nombres.

17. Nous allons revenir maintenant au problème dont nous nous sommes occupés au Chapitre précédent : reconnaître, étant donnée une expression

$$\frac{Q(x, y, z)}{f'_z}$$

(Q s'annulant sur la courbe double), si elle est susceptible de se mettre sous la forme

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}.$$

Comme nous l'avons signalé au Chapitre précédent, le nombre ρ joue un rôle important dans ce problème.

Le cas le plus simple est celui de $\rho = 1$, dont nous nous occuperons tout d'abord, en nous reportant particulièrement pour les notations au n° **10** du Chapitre précédent. Nous avons, si le problème est possible, l'identité

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y}, \tag{27}$$

où B_1 est de la forme

$$B_1 = a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_2 J_2 + \ldots + c_m J_m,$$

les a et c étant rationnels en y. Les I et les J sont déterminés, comme il a été expliqué aux n^{os} **10** et **12** du Chapitre précédent. On a

$$I_h = \frac{Q_h}{f'_z},$$

$$J_k = \frac{q_k}{f'_z},$$

les Q et q étant des polynomes en x et z à coefficients rationnels en y. Quant à A_1, c'est une fonction rationnelle x, y, z, dont il est inutile de donner la forme.

Posons, pour abréger,

$$B_1 = \frac{Q'}{f'_z},$$

Q' étant un polynome en x et z à coefficients rationnels en y.

18. Pour une valeur fixe, arbitraire d'ailleurs de y, intégrons les deux membres de l'identité (27) le long d'un cycle relatif à la courbe $f(x, y, z) = 0$ entre x et z. Nous aurons d'une manière générale

$$\omega(y) = \frac{d\omega'(y)}{dy}, \tag{28}$$

ω et ω' étant les périodes correspondantes des deux intégrales abéliennes

$$\int \frac{Q\,dx}{f'_z} \quad \text{et} \quad \int \frac{Q'\,dx}{f'_z}.$$

La variable y partant de a, tournant autour d'un point b_i et revenant à son point de départ, nous déduisons de suite par intégration de l'identité (28)

$$\int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\,dy = \Omega'_i(a), \tag{29}$$

en prenant pour $\omega(y)$ une période augmentant de $\Omega_i(y)$ par une rotation de y autour de b_i (nous nous servons des notations du commencement de ce Chapitre). Quant à $\Omega'_i(y)$ il a la même signification par rapport à l'intégrale

$$\int \frac{Q'\,dx}{f'_z}, \tag{30}$$

que $\Omega_i(y)$ par rapport à l'intégrale

$$\int \frac{Q\,dx}{f'_z}. \tag{31}$$

Les égalités (29) relatives aux divers points singuliers b vont nous permettre de faire une remarque importante. D'après la première section de ce Chapitre, les périodes étudiées de l'intégrale double

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

sont de la forme

$$\sum \mu_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\,dy \qquad \left[\text{avec l'identité } \sum \mu_i \Omega_i(y) = 0\right].$$

Les équations différentielles linéaires relatives aux deux intégrales (30) et (31) ont le même groupe. Si, entre certains Ω'_i, on a l'identité

$$\sum \mu_i \Omega_i(y) = 0,$$

on aura nécessairement l'identité

$$\sum \mu_i \Omega'_i(y) = 0.$$

Or on a

$$\sum \mu_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\,dy = \sum \mu_i \Omega'_i(a) = 0.$$

Par conséquent, *toutes les périodes* [1] *de l'intégrale double sont nulles*. Ainsi, l'identité (27) entraîne la conséquence que toutes les périodes de l'intégrale double

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

sont nulles. Il s'agit d'ailleurs, on ne doit pas l'oublier, de surface pour laquelle $\rho = 1$.

19. Nous démontrerons maintenant la réciproque du théorème précédent :

Si toutes les périodes sont nulles pour l'intégrale double qui précède, on peut mettre $\frac{Q}{f'_z}$ sous la forme

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y}.$$

Nous allons d'abord chercher si, les périodes étant supposées

---

[1] Quand nous parlons de périodes, nous parlons toujours des périodes étudiées plus haut, relatives à des cycles tout entiers à distance finie, et qui sont en nombre $N - 2p - (m - 1)$.

nulles, on peut déterminer les a et les c rationnellement en y, de telle sorte que

$$\int_{b_i}^{y} \Omega_i(y)\,dy = \Omega'_i(y),$$

$\Omega'_i(y)$ correspondant à l'intégrale

$$\int \frac{Q'\,dx}{f'_z},$$

où

$$\frac{Q'}{f'_z} = a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_2 J_2 + \ldots + c_m J_m,$$

avec les notations rappelées au nº 17. Désignons d'une manière générale par

$$\Omega_i^h \quad \text{et} \quad \Upsilon_i^k$$

les valeurs, analogues à Ω_i, se rapportant aux intégrales

$$\int \frac{Q_h}{f_z}\,dx \quad \text{et} \quad \int \frac{q_k\,dx}{f'_z};$$

écrivons les N relations

$$(\text{R}) \qquad \int^{y} \Omega_i(y)\,dy = a_1 \Omega_i^1 + \ldots + a_{2p} \Omega_i^{2p} + c_2 \Upsilon_i^2 + \ldots + c_m \Upsilon_i^m,$$

qui vont déterminer les $2p + m - 1$ fonctions de y

$$a_1, \quad \ldots, \quad a_{2p}, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_m.$$

Les N relations (R) se réduiront à $2p + m - 1$ d'entre elles, puisque toutes les périodes sont supposées nulles; car, en ajoutant plus de $2p + m - 1$ des relations précédentes multipliées par des entiers μ tels que $\Sigma \mu_i \Omega_i(y) = 0$, on obtiendra zéro identiquement. Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait des relations distinctes en faisant i successivement égal à

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad 2p + m - 1.$$

Le déterminant des coefficients des $2p + m - 1$ inconnues a et c dans ces relations ne sera pas identiquement nul, car alors il y aurait une combinaison linéaire des intégrales

$$\int \frac{Q_h\,dx}{f'_z} \quad \text{et} \quad \int \frac{q_k\,dx}{f'_z},$$

qui, n'ayant pas de période, serait algébrique, ce qui est incompatible avec la façon dont ont été formées ces intégrales.

Les relations (R) permettent donc de déterminer les a et les c, mais *les valeurs ainsi obtenues sont-elles fonctions rationnelles de y*? Il est aisé de voir qu'il en est bien ainsi; il suffit de montrer que ces fonctions sont uniformes, car aucune singularité essentielle ne se trouve dans les expressions figurant dans les calcnls qui précèdent. Or, quand on fait décrire à y un chemin fermé entourant le point singulier b_s, les

$$\Omega_i^h, \quad \Upsilon_i^k$$

et l'intégrale

$$\int_{b_i}^{y} \Omega_i(y)\,dy$$

se reproduisent respectivement aux termes additifs près

$$\nu_s \Omega_s^h, \quad \nu_s \Upsilon_s^k \quad \text{et} \quad \nu_s \int_{b_s}^{y} \Omega_s(y)\,dy \qquad (\nu_s \text{ entier}).$$

L'ensemble des relations (R) n'a donc pas changé, quand on substitue aux coefficients des a et des c leurs nouvelles valeurs après que y, partant d'un point, y revient après avoir décrit un contour quelconque. Ceci suffit évidemment à établir que les a et les c sont des fonctions uniformes, et, par suite, rationnelles de y.

Nous avons donc déterminé une fonction rationnelle B_1 de x, y et z, en posant

$$B_1 = \frac{Q'}{f'_z}.$$

Montrons maintenant que l'on peut déterminer une fonction rationnelle A_1 de x, y, z, telle que

$$\frac{Q}{f_z} = \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial x}.$$

Il suffit de faire voir que l'intégrale abélienne

$$\int \left(\frac{Q}{f'_z} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right) dx,$$

regardée comme appartenant à la courbe entre x et z,

$$f(x, y, z) = 0,$$

n'a pas de période. Or c'est précisément ce fait qu'expriment les relations (R), qui nous ont servi à déterminer les a et c figurant dans B_1, ou du moins ce fait résulte de leur dérivation par rapport à y. Il est donc certain que nous pourrons déterminer rationnellement B_1 en x, y et z satifaisant à la relation précédente, comme nous voulions l'établir.

Il est important de remarquer que, dans la démonstration de la réciproque, nous ne nous sommes pas servi de ce que $\rho = 1$. Quand les périodes sont toutes nulles pour l'intégrale double

$$(\alpha) \qquad \int\int \frac{Q}{f'_z}\, dx\, dy,$$

on peut mettre $\frac{Q}{f'_z}$ sous la forme indiquée. Nous pouvonc donc énoncer la proposition suivante :

Pour que l'expression $\frac{Q}{f'_z}$ *puisse se mettre sous la forme*

$$\frac{\partial A}{dx} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

il suffit que toutes les périodes de l'intégrale (α) *soient nulles. Cette condition suffisante sera, de plus, nécessaire s'il s'agit d'une surface pour laquelle le nombre* ρ *égale l'unité.*

20. Le théorème précédent va nous conduire à une proposition très importante relative aux surfaces *pour lesquelles* $\rho = 1$.

En écrivant que toutes les périodes de l'intégrale (α) sont nulles, nous avons

$$N - (2p + m - 1)$$

égalités à écrire. Ces égalités sont-elles bien distinctes? C'est une question qu'il nous faut examiner tout d'abord. Nous avons rappelé (n° 13) que toutes les intégrales de la forme (α), où Q est un polynome en x, y et z s'annulant sur la courbe double, se ramènent par la soustraction d'une intégrale

$$\int\int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right] dx\, dy$$

(U et V étant des polynomes en x et z à coefficients rationnels en y) à une expression de la même forme, mais où le degré du

polynome Q est limité. Soit donc

$$(\beta) \qquad \int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

P étant un polynome, s'annulant toujours sur la courbe double, dont le degré soit ainsi limité. Le polynome P ainsi réduit renferme un certain nombre de paramètres essentiellement distincts $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ (*voir* n° 13). La question est la suivante :

Les $N - 2p - (m-1)$ périodes de l'intégrale (β) sont des polynomes linéaires et homogènes en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$; ces polynomes sont-ils algébriquement distincts, c'est-à-dire aucune combinaison linéaire à coefficients constants de ces polynomes n'est-elle identiquement nulle par rapport aux paramètres α? Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi. Plaçons-nous, en effet, dans l'hypothèse où les polynomes en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ ne seraient pas distincts. Pour une intégrale double *arbitraire* de la forme (α), les périodes se ramènent aux périodes d'une intégrale (β), puisque l'intégrale soustraite pour faire la réduction n'a pas de périodes; les périodes de l'intégrale (β) étant, dans notre hypothèse, liées par une certaine relation linéaire dont les coefficients sont indépendants de α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$, il en sera de même pour les périodes de (α). Nous arrivons donc à la conclusion que les périodes

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_{N-2p-(m-1)}$$

de l'intégrale (α), où Q est un polynome uniquement assujetti à passer par la courbe double, sont liées par une relation

$$(32) \qquad \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_{N-2p-(m-1)} P_{N-2p-(m-1)} = 0,$$

les λ n'étant pas tous nuls et étant indépendants de Q. Or, il est aisé de voir que cela est impossible. Nous emploierons un raisonnement tout à fait semblable à celui qui nous à réussi au n° 13 pour un but analogue. Q ayant d'abord une valeur déterminée, nous envisageons une intégrale double où Q est remplacé par

$$\varphi(y)\,Q,$$

en désignant par $\varphi(y)$ un polynome arbitraire. Alors, en raisonnant comme au n° 13, la relation précédente entre les périodes

nous conduit à une relation devant être vérifiée, quel que soit le polynome $\varphi(y)$,

$$(33) \qquad m_1 \int_{b_1}^{a} \varphi(y)\Omega_1(y)\,dy + \ldots + m_N \int_{b_N}^{a} \varphi(y)\,\Omega_N(y)\,dy = 0,$$

les m étant des constantes (et non pas des entiers, comme au n° 13) qui ne sont pas toutes nulles. Les Ω sont des fonctions déterminées, qui correspondent à l'intégrale (α) dont on est parti. Il est essentiel de remarquer que tous les termes du premier membre ne peuvent disparaître, par suite de ce que les m seraient nuls. Soient en effet, pour l'intégrale (α) dont on est parti, les périodes P formées de la façon suivante, en supposant

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p+m-1}$$

linéairement indépendants. On pose

$$P_h = \mu_1 \int_{b_1}^{a} \Omega_1(y)\,dy + \ldots + \mu_{2p+m-1} \int_{b_{2p+m-1}}^{a} \Omega_{2p+m-1}(y)\,dy$$
$$+ \mu_{2p+m-1+h} \int_{b_{2p+m-1+h}}^{a} \Omega_{2p+m-1+h}(y)\,dy.$$
$$[h = 1, 2, \ldots, N - 2p - (m-1)],$$

l'entier $\mu_{2p+m-1+h}$ n'étant certainement pas nul. Si donc, dans la relation (32), λ_h n'est pas nul, on trouvera certainement dans (33) un terme en

$$\int_{b_{2p+m-1+h}}^{a} \varphi(y)\,\Omega_{2p+m-1+h}(y)\,dy$$

et, par suite, la constante $m_{2p+m-1+h}$ n'est pas nulle. D'ailleurs, aucun des Ω n'est identiquement nul.

La relation (33) devrait être vérifiée, quel que soit le polynome $\varphi(y)$; il n'y a qu'à raisonner, comme au n° 13, pour voir que cela est impossible. Par suite, il est bien établi que, en écrivant que les $N - 2p - (m-1)$ périodes de l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

sont nulles, *on obtient* $N - 2p - (m-1)$ *relations distinctes.*

Il résulte de là que *l'on a*

$$s = N - 2p - (m - 1).$$

Si en effet s était inférieur à $N - 2p - (m - 1)$, on n'aurait pas $N - 2p - (m - 1)$ relations distinctes, en écrivant que les périodes de l'intégrale (α) sont nulles. D'autre part, si s était supérieur à $N - 2p - (m - 1)$, il y aurait au moins une intégrale de la forme (β), où tous les paramètres α ne seraient pas nuls, et qui se réduirait à une intégrale du type

$$\int\int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right] dx\, dy,$$

ce qui est en contradiction avec la définition du nombre s.

21. Proposons-nous de calculer le nombre ρ_0 des intégralei doubles *distinctes* de seconde espèce. Ces intégrales rentrent dans les intégrales du type (β), dépendant des s paramètres α. Il faut écrire d'abord que les intégrales de ce type sont de *seconde espèce;* ceci donnera exactement $2p$ relations, car nous avons vu que, sans des conditions très générales, les $2p$ résidus d'une intégrale double de la forme en question par rapport à la courbe à l'infini de la surface ne peuvent être liés par aucune relation. Nous avons donc le nombre

$$s - 2p$$

d'intégrales du type (β), qui sont de seconde espèce. Par suite, $s - 2p$ représente le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce. D'où le théorème suivant qui est fondamental dans la théorie :

Soit une surface f pour laquelle $\rho = 1$. Le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce est donné par l'égalité

$$\rho_0 = N - 4p - (m - 1).$$

ou encore :

Le nombre ρ_0 est égal au nombre des périodes correspondant à des cycles à deux dimensions situés à distance finie de l'intégrale double générale de seconde espèce de la forme toujours considérée dans notre analyse

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}.$$



Il est remarquable que cet énoncé ait précisément la même forme que dans la théorie des courbes algébriques, où le nombre des intégrales abéliennes distinctes de seconde espèce est précisément égal au nombre des périodes d'une intégrale de seconde espèce. Mais la généralisation n'était pas immédiate, et elle est plutôt dans la forme que dans le fond, les périodes n'ayant pas des deux côtés absolument le même caractère; elle n'est d'ailleurs exacte que quand $\rho = 1$. Il nous reste à examiner le cas où ρ est différent de l'unité.

22. Reportons-nous au n° 15 du Chapitre précédent. On y a vu que, à un ensemble de lignes

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_{\rho-1}$$

correspondant au théorème fondamental de la page 241, on peut faire correspondre des expressions

$$\frac{Q_1}{f'_z}, \quad \frac{Q_2}{f'_z}, \quad \ldots, \quad \frac{Q_{\rho-1}}{f'_z}$$

(Q_i polynome en x, y, z s'annulant sur la courbe double), réductibles à une somme de deux dérivées partielles de la forme tant de fois écrite (les fonctions sous ces signes de dérivation devenant infinies pour une ligne C). De plus, toute autre expression

$$\frac{Q}{f'_z}$$

(Q polynome en x, y, z s'annulant sur la courbe double), réductible à une somme de deux dérivées partielles, sera de la forme

$$\frac{\mu_1 Q_1 + \ldots + \mu_{\rho-1} Q_{\rho-1}}{f'_z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right),$$

les μ étant des constantes, U et V des polynomes en x et z, à coefficients rationnels en y, s'annulant sur la courbe double.

Ceci rappelé, nous pouvons reprendre avec les modifications nécessaires l'analyse du numéro précédent. Nous avons toujours le nombre

$$s - 2p$$

des intégrales de seconde espèce du type (β), dont aucune combi-

naison linéaire n'est réductible à une intégrale du type envisagé plus haut

$$\iint \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right] dx\, dy.$$

Mais, parmi ces $s - 2p$ intégrales, figurent des intégrales de la forme

$$\iint H\, dx\, dy,$$

où l'on a

$$H = \frac{\mu_1 Q_1 + \ldots + \mu_{\rho-1} Q_{\rho-1}}{f'_z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right).$$

Il faut donc retrancher le nombre $\rho - 1$ de $s - 2p$ pour avoir le nombre des intégrales doubles *distinctes* de seconde espèce, *ce qui nous conduit de suite à la formule*

$$\rho_0 = N - 4p - (m-1) - (\rho - 1).$$

On voit que le nombre ρ intervient dans l'expression de ρ_0. Nous pouvons alors énoncer le théorème fondamental suivant qui comprend comme cas particulier le théorème du numéro précédent.

Le nombre ρ_0 est égal au nombre des périodes correspondant à des cycles à deux dimensions situés à distance finie de l'intégrale double générale de seconde espèce de la forme

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

(Q polynome en x, y, z s'annulant sur la courbe double), *diminué de* $\rho - 1$.

Dans la formule qui exprime le théorème précédent, le nombre ρ_0 est un invariant *absolu*, c'est-à-dire un invariant pour toute transformation birationnelle. Nous avons déjà dit qu'il n'en était pas de même de ρ.

23. Nous avons vu (nº 19) que, si toutes les périodes d'une intégrale double

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

sont nulles, on a une identité de la forme

$$\frac{Q(x, y, z)}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}; \tag{34}$$

mais cette condition, suffisante pour l'identité précédente, n'est nécessaire que si $\rho = 1$.

Quand ρ est supérieur à *un*, une intégrale

$$\iint \frac{Q(x, y, z)}{f'_z}\, dx\, dy,$$

où $\frac{Q}{f'_z}$ a la forme (34), peut avoir des périodes différentes de zéro. Il est intéressant de voir à quel fait analytique est due cette circonstance.

On a vu, au n° 15 du Chapitre précédent, qu'à chaque courbe C du théorème fondamental qui conduit à la définition du nombre ρ (p. 241), correspond une fonction

$$\frac{Q_i}{f'_z} \qquad (Q_i \text{ polynome en } x, y \text{ et } z),$$

telle que

$$\frac{Q_i}{f'_z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M_i}{g_i f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{N_i}{g_i f'_z}\right), \tag{35}$$

M_i et N_i étant des polynomes en x et z, à coefficients rationnels en y. Quant à g_i c'est un polynome en x et y, et la courbe $g_i = 0$ donne la projection de C_i sur le plan des xy. Les deux quotients

$$\frac{M_i}{g_i} \quad \text{et} \quad \frac{N_i}{g_i}$$

deviennent seulement infinis à distance finie sur la courbe C_i (en dehors de lignes $y = \text{const.}$).

De plus, il résulte de l'identité (35) la conséquence suivante : pour une valeur donnée de y, l'intégrale

$$\int \frac{N_i}{g_i f'_z}\, dx, \tag{36}$$

relative à la courbe entre x et z, $f(x, y, z) = 0$ a, comme points singuliers logarithmiques à distance finie, les points de la courbe C_i correspondant à la valeur envisagée de y; pour tous ces points *la*

période logarithmique a la même valeur qui est une constante Γ *indépendante de* y. Pour l'établir, il suffit d'intégrer les deux membres de l'identité (35), multipliés par dx dans le plan de la variable complexe (y ayant la valeur envisagée d'ailleurs arbitraire) le long d'un petit contour entourant un point M. Le premier membre donne zéro et le second nous apprend que la dérivée par rapport à y de la période logarithmique en question est nulle, ce qui justifie bien la remarque énoncée.

Ceci posé, à l'intégrale (36) correspondent des fonctions que nous allons appeler Ω', jouant par rapport à (36) le même rôle que les Ω par rapport à l'intégrale

$$\int \frac{Q_i}{f'_z}\,dx;$$

mais, tandis que pour cette dernière il y avait entre plus de $2p+m-1$ fonctions Ω une relation linéaire et homogène à coefficients entiers, soit

$$\sum \mu_i \Omega_i(y) = 0,$$

la relation correspondante pour l'intégrale (36) sera

$$\sum \mu_i \Omega'_i(y) + k\Gamma = 0 \qquad (k \text{ entier});$$

car la constante Γ est une période de l'intégrale (36), qui n'avait pas son correspondant dans l'intégrale ci-dessus.

Il est alors facile de se rendre compte que certaines périodes de l'intégrale double

$$\iint \frac{Q_i}{f'_z}\,dx\,dy \tag{37}$$

puissent être différentes de zéro, en reprenant l'analyse du n° **18**. Nous avons, comme dans ce numéro,

$$\sum \mu_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\,dy = \sum \mu_i \Omega'_i(a) \qquad \left[\sum \mu_i \Omega_i(y) = 0\right];$$

mais, ici, le second membre n'est plus nul nécessairement ; il est égal à $-k\Gamma$ qui peut être différent de zéro. On se rend donc bien compte que *toutes les périodes puissent n'être pas nulles* dans le cas actuel correspondant à $\rho > 1$; de plus, on voit que l'inté-

grale (37) a une seule période qui est multiple de la quantité Γ relative à l'intégrale (36).

24. On pourrait vérifier les conclusions précédentes sur l'intégrale double de seconde espèce

$$\iint \frac{x\,dx\,dy}{z},$$

relative à la surface

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1,$$

déjà considérée au n° **14**. On a ici l'identité

$$\frac{x}{z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{yx^4}{(1-x^3)z}\right].$$

L'intégrale double considérée a deux périodes *différentes de zéro,* quoique le coefficient de $dx\,dy$ sous le signe d'intégration soit la somme de deux dérivées partielles.

Il en est de même pour la surface

$$z^2 = P(x)P(y),$$

$P(x)$ étant un polynome en x, et cet exemple a appelé le premier l'attention sur la circonstance qui nous occupe; nous avons formé incidemment (p. 199 de ce Volume) une intégrale double

$$\iint \frac{U(x,y)}{z}\,dx\,dy,$$

où U représente un certain polynome en x et y, qui avait des périodes *différentes de zéro,* et l'on avait la relation

$$\frac{U(x,y)}{z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{P(x)}{(y-x)z}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{P(y)}{(x-y)z}\right],$$

qui définissait d'ailleurs le polynome U. Il nous suffira d'appeler l'attention du lecteur sur ces exemples, où l'on vérifiera sans peine les remarques générales que nous venons de faire.

IV. — Discussion des hypothèses générales faites dans ce Chapitre.

25. Il a été admis, dans tout ce qui précède (*voir* n° 11), que pour l'équation linéaire E' correspondant à une intégrale arbitraire

$$\int \frac{P(x, y, z)\,dx}{f'_z}$$

(le polynome P s'annulant sur la courbe double), on pouvait trouver $2p + m - 1$ fonctions Ω qui ne soient pas liées par une relation homogène et linéaire à coefficients entiers. Cette condition, avons-nous dit, est en général vérifiée. Pour préciser, nous allons montrer qu'elle est certainement vérifiée si la surface algébrique n'a pas d'intégrales de différentielles totales de seconde espèce (transcendantes), c'est-à-dire si sa connexion linéaire se réduit à l'unité.

26. Commençons par prendre une intégrale abélienne

$$\int \frac{Q(x, y, z)\,dx}{f'_z}$$

(le polynome Q s'annulant sur la courbe double) qui soit une intégrale arbitraire de *seconde* espèce pour la courbe entre x et z,

$$f(x, y, z) = 0.$$

Nous avons alors pour ses périodes une équation différentielle linéaire E d'ordre $2p$, considérée déjà bien des fois; soit toujours Ω_i la fonction Ω correspondant au point singulier b_i.

Supposons que parmi les Ω_i il y en ait moins de $2p$, soient

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_h \qquad (h < 2p),$$

entre lesquelles il n'existe pas de relation homogène et linéaire à coefficients entiers, mais telles que les autres Ω sont liées à celles-ci par une telle relation. Aux h cycles correspondant à $\Omega_1, \ldots, \Omega_h$, on peut associer $2p - h$ autres cycles, de manière à avoir pour la surface de Riemann entre x et z,

$$f(x, y, z) = 0,$$

$2p$ cycles distincts; désignons ces $2p-h$ cycles, ou plutôt les intégrales correspondantes par

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2p-h}.$$

Pour les $2p$ intégrales distinctes de seconde espèce

$$\int \mathrm{I}_1\, dx, \quad \ldots, \quad \int \mathrm{I}_{2p}\, dx, \tag{38}$$

formons le Tableau des périodes correspondant à ces cycles,

$$\begin{array}{llll}
\Omega_1^1 & \Omega_1^2 & \ldots & \Omega_1^{2p} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\Omega_h^1 & \Omega_h^2 & \ldots & \Omega_h^{2p} \\
\omega_1^1 & \omega_1^2 & \ldots & \omega_1^{2p} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\omega_{2p-h}^1 & \omega_{2p-h}^2 & \ldots & \omega_{2p-h}^{2p}.
\end{array}$$

Le déterminant de ce Tableau n'est pas identiquement nul, car autrement on pourrait trouver une combinaison linéaire des intégrales (38), qui serait sans période, ce qui est impossible. Ceci posé, formons les équations

$$\begin{array}{l}
a_1\Omega_1^1 + a_2\Omega_1^2 + \ldots + a_{2p}\Omega_1^{2p} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_1\Omega_h^1 + a_2\Omega_h^2 + \ldots + a_{2p}\Omega_h^{2p} = 0, \\
a_1\omega_1^1 + a_2\omega_1^2 + \ldots + a_{2p}\omega_1^{2p} = \mathrm{C}_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_1\omega_{2p-h}^1 + a_2\omega_{2p-h}^2 + \ldots + a_{2p}\omega_{2p-h}^{2p} = \mathrm{C}_{2p-h},
\end{array}$$

les $2p-h$ lettres C représentant des constantes arbitraires. Ces équations définissent les a comme fonctions de y; nous allons voir que ce sont des fonctions rationnelles. En effet, les Ω et les ω se reproduisent, par une circulation quelconque de y, à une somme près de multiples des Ω; ainsi, par exemple, ω_1^k se change en

$$\omega_1^k + \mu_1\Omega_1^k + \mu_2\Omega_2^k + \ldots + \mu_h\Omega_h^k,$$

les μ étant des nombres rationnels indépendants de k. Il en résulte que le système des équations en a reste invariable pour une circulation quelconque de y; donc les a sont uniformes en y, et, par

suite, rationnels (aucune singularité essentielle ne figurant dans les fonctions envisagées).

Nous concluons de là que les $2p$ périodes de l'intégrale abélienne

$$\int (a_1 I_1 + a_2 I_2 + \ldots + a_{2p} I_{2p})\, dx,$$

relative à la courbe entre x et z, $f(x, y, z) = 0$, ne dépendent pas de y, et, en raisonnant comme nous l'avons fait plusieurs fois, on voit que la surface aura des intégrales de différentielles totales de seconde espèce (transcendantes). Nous pouvons donc dire que, si la surface a une connexion linéaire égale à l'unité (ce qui arrive en général), *il y aura certainement $2p$ fonctions Ω qui ne seront pas liées par une relation homogène et linéaire à coefficients entiers.*

27. Plaçons-nous dans le cas qui précède. Nous allons démontrer que, *pour une intégrale arbitraire du type toujours considéré*

$$\int \frac{P(x, y, z)\, dx}{f'_z}, \tag{39}$$

il y a $2p + m - 1$ fonctions Ω qui ne sont pas liées par une relation homogène et linéaire à coefficients entiers.

Tout d'abord il y en aura au moins $2p$, puisque, d'après ce qui précède, il en est ainsi quand l'intégrale abélienne (39) est de seconde espèce.

Supposons d'abord qu'il y en ait seulement $2p$; nous allons être conduits rapidement à une contradiction. Reprenons à cet effet les intégrales des numéros précédents

$$\int I_1\, dx, \quad \ldots, \quad \int I_{2p}\, dx, \quad \int J_2\, dx, \quad \ldots, \quad \int J_m\, dx$$

avec les Ω_i^h et Υ_i^k correspondants ($i = 1, 2, \ldots, 2p$). Écrivons les équations

$$a_1 \Omega_i^1 + \ldots + a_{2p} \Omega_i^{2p} + c_2 \Upsilon_i^2 + \ldots + c_m \Upsilon_i^m = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 2p \tag{40}$$

En y considérant les c comme des constantes arbitraires, ces équations déterminent

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p},$$

le déterminant de ces équations du premier degré en a étant certainement différent de zéro. D'ailleurs, d'après un raisonnement analogue à celui du numéro précédent, les a ainsi déterminés seront rationnels en y, puisque le système d'équations ne change pas pour une circulation quelconque de y.

Les relations (40), où les c sont des constantes, expriment que les $2p + m - 1$ périodes de l'intégrale abélienne

$$(41) \qquad \int (a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_2 J_2 + \ldots + c_m J_m)\, dx$$

sont indépendantes de y. Il y en a $2p$ qui sont nulles, et les $m-1$ périodes logarithmiques sont les constantes arbitraires $c_2, \ldots, c_m$. On pourra par suite former une intégrale de différentielle totale de la surface de nature transcendante et n'ayant aucune ligne logarithmique à distance finie. Or ceci est impossible, et par suite l'hypothèse faite qu'il y ait seulement $2p$ fonctions Ω distinctes est inadmissible.

28. Supposons alors qu'il y ait seulement, pour l'intégrale (39),

$$2p + m - 1 - \tau \qquad (0 < \tau < m - 1)$$

fonctions désignées d'une manière générale par Ω, qui ne soient pas liées par une relation linéaire et homogène à coefficients entiers (les égalités étant exclues des inégalités ci-dessus).

Considérons $2p$ des Ω correspondant à $2p$ cycles distincts de la surface de Riemann entre x et z, $f(x, y, z) = 0$, puis $m - 1 - \tau$ des autres Ω linéairement indépendants entre eux et avec les premiers. On aura donc, pour une intégrale (39) arbitraire,

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p},$$

puis

$$\Omega_{2p+1}, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p+m-1-\tau}.$$

Envisageons d'autre part les polynomes $\pi_2, \ldots, \pi_m$, correspondant aux points logarithmiques à l'infini. Les

$$\Omega_{2p+1}, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p+m-1-\tau}$$

peuvent s'exprimer à l'aide de $\Omega_1, \ldots, \Omega_{2p}$ et des π. Soit ainsi

$$\Omega_h = \lambda_1^h \Omega_1 + \ldots + \lambda_{2p}^h \Omega_{2p} + \mu_2^h \pi_2 + \ldots + \mu_m^h \pi_m$$
$$(h = 2p + 1, \ \ldots, \ 2p + m - 1 - \tau),$$

les λ et les μ étant rationnels. D'ailleurs, tous les déterminants d'ordre $m-1-\tau$ formés avec les μ ne sont pas nuls, car, s'il en était ainsi, on aurait une relation linéaire entre

$$\Omega_1, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p} \quad \text{et les} \quad \Omega_h,$$

ce qui est contre l'hypothèse. On pourra donc, par exemple, des $m-1-\tau$ équations du premier degré en $c_2, \ldots, c_m$,

$$\mu_2^h c_2 + \ldots + \mu_m^h c_m = 0 \qquad (h = 2p+1, \ldots, 2p+m-1-\tau),$$

tirer $c_2, \ldots, c_{m-\tau}$ en fonction de $c_{m-\tau+1}, \ldots, c_m$.

Ceci posé, reprenons les intégrales

$$\int \mathrm{I}_1\,dx, \quad \ldots, \quad \int \mathrm{I}_{2p}\,dx, \quad \int \mathrm{J}_2\,dx, \quad \ldots, \quad \int \mathrm{J}_m\,dx$$

avec les

$$\Omega_i^h \quad \text{et} \quad \Upsilon_i^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p+m-1-\tau).$$

Écrivons les $2p+m-1$ équations du premier degré entre les a et les c

$$a_1\Omega_i^1 + \ldots + a_{2p}\Omega_i^{2p} + c_2\Upsilon_i^2 + \ldots + c_m\Upsilon_i^m = 0$$
$$(i = 1, \ldots, 2p+m-1-\tau),$$
$$c_{m-\tau+1} = k_{m-\tau+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$c_m = k_m,$$

les k étant des constantes prises arbitrairement. Si les a et les c satisfont à ces équations, les $2p+m-1$ périodes de l'intégrale abélienne

$$(42) \qquad \int (a_1\mathrm{I}_1 + \ldots + a_{2p}\mathrm{I}_{2p} + c_2\mathrm{J}_2 + \ldots + c_m\mathrm{J}_m)\,dx$$

sont indépendantes des y, et il y en a τ qui ne sont pas nulles. Le système des équations précédentes peut se remplacer par le système équivalent

$$a_1\Omega_i^1 + \ldots + a_{2p}\Omega_i^{2p} + c_2\Upsilon_i^2 + \ldots + c_m\Upsilon_i^m = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p),$$
$$\mu_2^h c_2 + \ldots + \mu_m^h c_m = 0 \qquad (h = 2p+1, \ldots, 2p+m-1-\tau),$$
$$c_{m-\tau+1} = k_{m-\tau+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$c_m = k_m.$$

Sous cette dernière forme on voit immédiatement, à cause des remarques faites plus haut sur certains déterminants différents de zéro, que les équations peuvent être résolues. On a d'abord les c qui sont des constantes, puis les a. Or la première forme du système d'équations montre que ce système reste inaltéré pour une circulation quelconque de y. Les a seront par suite des fonctions rationnelles de y.

Donc, sous l'hypothèse que τ n'est pas nul, on forme une intégrale abélienne (42) dont les périodes ne dépendent pas de y, et τ d'entre elles sont arbitraires. On pourra alors former une intégrale de différentielle totale de la surface (de nature transcendante) n'ayant aucune ligne logarithmique à distance finie, et nous avons la même contradiction qu'à la fin du nº 27. Le théorème énoncé au commencement de ce paragraphe est donc démontré.

Nous parlerons plus tard des cas particuliers où la surface aurait une connexion linéaire supérieure à l'unité, et où certaines hypothèses d'un caractère général faites dans les deux derniers Chapitres ne seraient pas vérifiées.

V. — Remarques sur les périodes d'une intégrale double de fonction rationnelle [1].

29. Nous terminerons ce Chapitre en revenant sur certaines intégrales doubles de seconde espèce relatives à la surface

$$(S) \qquad x^3 + y^3 + z^3 = 1,$$

dont nous avons déjà parlé aux nos 15 et 16. Il s'agissait de l'intégrale double de seconde espèce

$$\iint \frac{\alpha xy + \beta yz + \gamma zx}{z^2}\, dx\, dy,$$

où α, β, γ sont trois constantes arbitraires. Nous avons trouvé les *six* périodes de cette intégrale correspondant à *six* cycles à deux dimensions tout entiers à distance finie. Or la surface S étant unicursale, on peut exprimer x, y et z en fonction rationnelle de deux

[1] E. Picard, *Sur les périodes d'une intégrale double de fonctions rationnelles* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1903).

paramètres u et v. L'intégrale double devient alors une intégrale double de fonction rationnelle

$$\iint \mathrm{R}(u, v)\, du\, dv,$$

R étant rationnelle en u, v. Cette intégrale double étant de seconde espèce, on a certainement

$$\mathrm{R}(u, v) = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial v},$$

A et B étant rationnelles en u et v. Tous les résidus de cette intégrale double sont donc nuls. D'autre part, on est porté naturellement à regarder comme étant des périodes de cette intégrale les six périodes de l'intégrale relative à la surface S, dont elle est la transformée. C'est une question de mots; mais il ne faut pas faire de confusions avec les dénominations employées plus haut; les *six* cycles à deux dimensions dans l'espace (x, y, z), qui ont donné les six périodes en question, se transforment dans l'espace (u, v) en six cycles; mais, ou bien ces cycles ont des points à l'infini, ou bien ils passent par des points pour lesquels R devient infinie ou indéterminée.

Indiquons le résultat du calcul dans le cas de l'intégrale

$$(43)\qquad \iint \frac{y\, dx\, dy}{z} \qquad (\alpha = \gamma = 0),$$

pour laquelle les *six* cycles donnent seulement, comme nous l'avons vu plus haut, *deux* périodes.

On peut, pour la surface

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1,$$

exprimer x, y et z en fonctions rationnelles de deux paramètres u et v par les formules

$$x = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}, \qquad y = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}, \qquad z = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}},$$

où

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= v\varepsilon^2 + u\varepsilon + u^2v^2, \\ \mathrm{B} &= -v\varepsilon - u\varepsilon^2 - u^2v^2, \\ \mathrm{C} &= 1 + uv(v\varepsilon + u\varepsilon^2), \\ \mathrm{D} &= 1 + uv(v\varepsilon^2 + u\varepsilon), \end{aligned}$$

ε étant une racine cubique imaginaire de l'unité.

En substituant dans l'intégrale, on trouve le résultat très simple

$$\varepsilon(1-\varepsilon)\iint \frac{BC}{D^3}\,du\,dv, \tag{44}$$

et *tous les résidus de cette intégrale sont nuls.*

Les *deux* cycles donnant des périodes pour notre intégrale dans l'espace (x, y, z) peuvent être définis de la manière suivante. Posons

$$y = \sqrt[3]{1-x^3}.t, \qquad z = \sqrt[3]{1-x^3}.\sqrt[3]{1-t^3};$$

en faisant décrire à x et à t dans leurs plans respectifs des contours ne se réduisant pas à zéro et ramenant respectivement

$$\sqrt[3]{1-x^3} \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{1-t^3}$$

à leurs valeurs initiales, on engendrera un cycle à deux dimensions P de la surface S. Au cycle P de l'espace (x, y, z) correspond un continuum Q à deux dimensions de l'espace (u, v); l'intégrale double (44) prise sur ce continuum est en un sens une période de (44), puisqu'elle est une période de l'intégrale (43), mais *elle n'a rien de commun avec un résidu, et avec les périodes envisagées plus haut.*

La correspondance entre l'espace (x, y, z) et l'espace (u, v) est établie par les relations écrites plus haut

$$x = \frac{A}{D}, \qquad y = \frac{B}{D}, \qquad z = \frac{C}{D}.$$

Il y a certains points de l'espace (u, v) qui sont des points fondamentaux dans la représentation. Tels sont, à distance finie,

$$\begin{array}{ll} u = 1, & v = 1, \\ u = \varepsilon, & v = \varepsilon, \\ u = \varepsilon^2, & v = \varepsilon^2. \end{array}$$

A chacun de ces points de l'espace (u, v) correspond une courbe de l'espace (x, y, z); on conçoit que, si une de ces courbes rencontre le cycle à deux dimensions P, le continuum Q dans (u, v) passera par le point correspondant que nous appellerons A. Or un tel point A appartient au continuum

$$D = 0,$$

pour lequel l'intégrale est *en général* infinie, ce qui fait que le continuum Q est d'une tout autre nature que ceux que nous avons envisagés dans la théorie des résidus des intégrales doubles. Il n'y a donc aucune contradiction. On peut encore remarquer que, quand le cycle P se déforme dans l'espace (x, y, z), son correspondant Q, qui se déforme aussi, passe néanmoins constamment par le point A. Il y a aussi des points fondamentaux à l'infini, auxquels s'appliquent des considérations analogues.

CHAPITRE XII.

SUR LA FORMULE GÉNÉRALE DONNANT LE NOMBRE DES INTÉGRALES DOUBLES DISTINCTES DE SECONDE ESPÈCE [1].

I.

Sur une propriété des surfaces dont la connexion linéaire est supérieure à *un*.

1. Dans le Chapitre précédent il a été supposé que l'on avait affaire à une surface, pour laquelle ne se présentaient pas certaines circonstances exceptionnelles. On supposait que la connexion linéaire de la surface était égale à l'*unité* (t. II, p. 377), et, en outre (p. 327), que l'équation E n'admettait pas comme solution un polynome en y. Examinons de plus près ces deux conditions; cette étude va nous conduire d'abord à une propriété intéressante caractéristique des surfaces dont la connexion linéaire dépasse l'unité.

2. Reprenons l'équation différentielle linéaire E, déjà tant de fois considérée, à laquelle satisfont les périodes de l'intégrale abélienne arbitraire de seconde espèce

$$\int \frac{Q(x, y, z)\, dx}{f'_z} \tag{1}$$

relative à la courbe entre x et z

$$f(x, y, z) = 0,$$

(1) E. Picard, *Sur un théorème général concernant les surfaces algébriques de connexion linéaire supérieure à l'unité* (*Comptes rendus*, 21 novembre 1904). — *Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce* (*Comptes rendus*, 5 déc. 1904, et *Annales de l'École Normale supérieure*, 1905).



$Q(x, y, z)$ étant un polynome en x, y, z s'annulant sur la courbe double. Désignons toujours par Ω_i la période correspondant au point b_i. L'analyse développée (t. II, p. 377) nous permet, avec un léger complément, de formuler une conclusion générale.

Supposons que, parmi les Ω_i, il y en ait $h (h \leqq 2p)$ linéairement indépendants ; je dis que *la surface aura alors exactement* $2p - h$ *intégrales de différentielles totales de seconde espèce distinctes.*

Le raisonnement du n° 26 (t. II, p. 377) montre d'abord immédiatement que la surface possède certainement $2p - h$ intégrales de différentielles totales de seconde espèce distinctes, les constantes arbitraires étant $C_1, C_2, \ldots, C_{2p-h}$. Inversement, supposons que la surface possède $2p - h'$ intégrales distinctes de seconde espèce, h' étant inférieur ou égal à h. Reprenant les intégrales

$$\int I_\lambda \, dx \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, 2p)$$

de la page 378, on peut, évidemment, trouver un cycle pour lequel la période correspondante s'augmente de

$$\Omega_\mu^\lambda$$

quand y tourne autour du point singulier b_μ. Si donc le coefficient de dx dans une intégrale de différentielle totale est égal à

$$a_1 I_1 + a_2 I_2 + \ldots + a_{2p} I_{2p},$$

les a étant des fonctions rationnelles de y, on aura nécessairement, puisque les périodes de

$$\int (a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p}) \, dx$$

ne dépendent pas de y, les relations

$$a_1 \Omega_\mu^1 + a_2 \Omega_\mu^2 + \ldots + a_{2p} \Omega_\mu^{2p} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, h).$$

Nous avons là h équations entre les a, et il y aura à adjoindre à ces équations (comme à la page 378) $2p - h$ autres équations, où ne pourront figurer plus de $2p - h$ constantes arbitraires. Nous aurons donc simplement $2p - h$ intégrales distinctes de seconde espèce, et l'on a, par suite, $h' = h$.

Il y a donc un lien très étroit entre le nombre des Ω_i linéairement indépendants relatifs à l'équation E et le nombre des intégrales distinctes de seconde espèce de la surface : *Si h est le nombre des premiers, le nombre des secondes sera $2p - h$.*

3. Nous pouvons aller plus loin et donner la forme la plus simple à la condition pour que la surface ait un nombre déterminé d'intégrales de différentielles totales de seconde espèce. Le théorème que nous avons en vue est le suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface ait r intégrales distinctes de différentielles totales de seconde espèce est que l'équation E *soit vérifiée par r polynomes en y linéairement indépendants.*

La démonstration de ce théorème va nécessiter quelques remarques préliminaires.

4. Reportons-nous à la page 99 du Tome I, où nous avons déjà considéré l'équation différentielle linéaire E, correspondant à une intégrale (1) arbitraire. Désignons maintenant par

$$(\sigma) \qquad \omega'_i = m_1^i \omega_1 + m_2^i \omega_2 + \ldots + m_{2p}^i \omega_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p)$$

une substitution quelconque du groupe de l'équation E; les m sont des entiers réels. En désignant par

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_{2p}$$

les périodes correspondant aux mêmes cycles que les ω d'une intégrale de différentielle totale de seconde espèce (transcendante), nous avons vu (*loc. cit.*) qu'elles satisfaisaient aux relations

$$(2) \qquad P_i = m_1^i P_1 + m_2^i P_2 + \ldots + m_{2p}^i P_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p),$$

et il y a autant de ces relations qu'il y a de substitutions fondamentales dans le groupe de E. Il a été démontré que, si l'on peut satisfaire à toutes ces relations, r étant le nombre des lettres P restant arbitraires, il y a pour la surface r intégrales distinctes de seconde espèce (transcendantes).



Ceci rappelé, cherchons à quelles conditions l'équation E admettra comme solution un polynome. Celui-ci serait de la forme

$$\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \ldots + \lambda_{2p} \omega_{2p},$$

les λ étant des constantes. Il faut et il suffit que l'expression précédente ne change pas quand on effectue sur les ω toutes les substitutions du groupe de E; car, dans ces conditions, elle est uniforme et, par suite, rationnelle, puisqu'il n'y a pas de points singuliers essentiels. D'ailleurs, cette fonction rationnelle se réduira à un polynome, puisque chaque point singulier est seulement de nature logarithmique. On aura donc

$$\begin{aligned}\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \ldots + \lambda_{2p} \omega_{2p} = \;& \lambda_1(m_1^1 \omega_1 + m_2^1 \omega_2 + \ldots + m_{2p}^1 \omega_{2p}) \\ & + \lambda_2(m_1^2 \omega_1 + m_2^2 \omega_2 + \ldots + m_{2p}^2 \omega_{2p}) + \ldots,\end{aligned}$$

ce qui entraîne les équations

$$(3) \qquad \lambda_i = \lambda_1 m_i^1 + \lambda_2 m_i^2 + \ldots + \lambda_{2p} m_i^{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Si le théorème énoncé au paragraphe précédent est exact, la possibilité de satisfaire à l'ensemble des équations (2) entraîne la même possibilité pour l'ensemble des équations (3), et le nombre des arbitraires, pour les P et les λ, sera le même. Telle est la question algébrique à laquelle nous sommes ramené.

5. Il est manifeste que, si le groupe de E était quelconque, il n'y aurait, au point de vue qui nous occupe, aucune connexion entre les systèmes (2) et (3), mais ce groupe n'est pas quelconque. Il résulte, en effet, de propositions classiques sur les relations entre les périodes de deux intégrales abéliennes, que les ω peuvent être choisis de manière que le groupe des substitutions (σ) satisfasse à la condition suivante : Soient

$$\begin{array}{lllll}\omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \ldots, & \omega_{2p}, \\ \upsilon_1, & \upsilon_2, & \upsilon_3, & \ldots, & \upsilon_{2p}\end{array}$$

deux séries de variables; toutes les substitutions (σ) transformeront en elles-mêmes la forme bilinéaire

$$F = \omega_1 \upsilon_2 - \omega_2 \upsilon_1 + \omega_3 \upsilon_4 - \omega_4 \upsilon_3 + \ldots + \omega_{2p-1} \upsilon_{2p} - \omega_{2p} \upsilon_{2p-1}$$



quand on effectue simultanément sur les ω et sur les υ la même substitution du groupe. Ce point important peut se démontrer avec précision de la manière suivante. Considérons pour une valeur particulière y_0 de y, sur la surface de Riemann R correspondant à la relation entre x et z

$$(\mathrm{R}) \qquad f(x, y_0, z) = 0,$$

le contour de Riemann formé de p rétrosections (C, D) réunies deux à deux à la manière d'une chaîne. C'est le contour désigné par K dans le *Traité d'Analyse* de M. Picard (t. II, p. 424, 2ᵉ édit.). Quand y partant de y_0 revient en ce point après avoir décrit un contour quelconque, le contour K s'est déformé et est devenu un autre contour K′ du même type formé des rétrosections (C′, D′) réunies deux à deux en chaîne.

Considérons, sur la surface R, deux intégrales arbitraires de seconde espèce U et V aux périodes respectives $\omega_1, \ldots, \omega_{2p}$ et $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_{2p}$; l'intégrale classique

$$\int \mathrm{U}\, d\mathrm{V}$$

prise le long du contour K donne, comme on sait, la combinaison

$$(\alpha) \qquad \omega_1 \upsilon_2 - \omega_2 \upsilon_1 + \ldots + \omega_{2p-1} \upsilon_{2p} - \omega_{2p} \upsilon_{2p-1};$$

elle est, d'autre part, égale à la somme des résidus des pôles de $\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dx}$. Avec le contour K′, on obtiendra la combinaison

$$(\alpha') \qquad \omega'_1 \upsilon'_2 - \omega'_2 \upsilon'_1 + \ldots + \omega'_{2p-1} \upsilon'_{2p} - \omega'_{2p} \upsilon'_{2p-1},$$

qui sera égale à la somme des mêmes résidus. Il y a donc égalité entre les deux expressions (α) et (α'); d'ailleurs, les ω' sont des fonctions linéaires des ω, et les υ' sont égales aux mêmes expressions linéaires des υ. En écrivant l'égalité de (α) et (α'), on a une identité par rapport aux ω et aux υ, car on a pu choisir U et V de manière que ces périodes soient arbitraires; l'égalité est donc une identité, ce qui revient à dire que la forme (α) est transformée en elle-même. C'est à cette propriété de toute substitution du groupe de E qu'est due, comme nous allons le voir, la dépendance entre les systèmes (2) et (3).

6. Si, dans la forme F, nous posons

$$(4) \quad \begin{cases} \upsilon_1 = -\Omega_2, & \upsilon_3 = -\Omega_4, & \ldots, & \upsilon_{2p-1} = -\Omega_{2p} \\ \upsilon_2 = \Omega_1, & \upsilon_4 = \Omega_3, & \ldots, & \upsilon_{2p} = \Omega_{2p-1}, \end{cases}$$

la forme F devient

$$F = \omega_1 \Omega_1 + \omega_2 \Omega_2 + \ldots + \omega_{2p} \Omega_{2p}.$$

D'après ce qui précède, cette forme bilinéaire se transforme en elle-même, quand on effectue sur les ω la substitution σ, et que l'on effectue en même temps sur les Ω la substitution correspondante résultant du changement de variables (4), la substitution (σ) ayant été effectuée sur les υ en même temps que sur les ω. Nous appellerons Σ la substitution correspondant à la substitution σ, effectuée sur les Ω. Désignons cette dernière par

$$(\Sigma) \quad \Omega'_i = M_1^i \Omega_1 + M_2^i \Omega_2 + \ldots + M_{2p}^i \Omega_{2p} \quad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

On a identiquement

$$\omega_1 \Omega_1 + \omega_2 \Omega_2 + \ldots + \omega_{2p} \Omega_{2p} = \omega'_1 \Omega'_1 + \omega'_2 \Omega'_2 + \ldots + \omega'_{2p} \Omega'_{2p},$$

et de là se déduisent immédiatement des relations entre les m et les M. On voit bien aisément que, en vertu de ces relations, la substitution inverse de Σ, c'est-à-dire l'expression des Ω en fonction des Ω', correspond à

$$\Omega_i = m_i^1 \Omega'_1 + m_i^2 \Omega'_2 + \ldots + m_i^{2p} \Omega'_{2p} \quad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Or posons maintenant, dans les équations (2),

$$\begin{matrix} P_1 = -Q_2, & \ldots, & P_{2p-1} = -Q_{2p}, \\ P_2 = Q_1, & \ldots, & P_{2p} = Q_{2p-1}; \end{matrix}$$

le système de ces équations (2) devient manifestement

$$(5) \quad Q_i = M_1^i Q_1 + M_2^i Q_2 + \ldots + M_{2p}^i Q_{2p} \quad (i = 1, 2, \ldots, 2p),$$

d'après la manière même dont on passe de la substitution σ à la substitution Σ.

Dans la question qui nous occupe, on peut donc remplacer le système des équations (2), pris bien entendu pour toutes les substitutions du groupe de E, par le système des équations (5); on doit

établir que, pour les équations (5) et les équations (3), le degré d'indétermination dans la solution (les Q et les λ étant considérées comme les inconnues) est le même.

La chose est immédiate si nous transformons encore le système (5) en résolvant par rapport aux lettres Q du second membre, ce qui nous ramène à la substitution inverse et donne le système $(5)'$

$$(5)' \qquad Q_i = m_i^1 Q_1 + m_i^2 Q_2 + \ldots + m_i^{2p} Q_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Or, le système $(5)'$ n'est autre que le système (3); il suffit de poser

$$\begin{gathered} \lambda_1 = Q_1, \\ \lambda_2 = Q_2, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_{2p} = Q_{2p}. \end{gathered}$$

On voit ainsi bien nettement que, *à toute solution du système* (2), *correspond une solution du système* (3). Il y a donc le même degré d'indétermination dans les deux systèmes et le théorème est établi. Nous pouvons dire que, *à toute intégrale de différentielle totale de seconde espèce* (*transcendante*), *correspond un système de quantités* P; *par suite, à toute intégrale de cette nature correspond un certain polynome en* y, *solution de* E *et, inversement, à tout polynome en* y, *solution de* E, *correspond, pour la surface, une intégrale de différentielle totale.*

Puisque les λ s'expriment à l'aide de r d'entre eux par des formules homogènes et linéaires à coefficients commensurables, on peut affirmer que l'*intégrale qui a servi à former l'équation* E *admet r périodes* DISTINCTES *qui sont des polynomes en* y.

On le voit de suite; car, en changeant, s'il est nécessaire, les indices, on peut supposer que $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_{2p}$ s'expriment de la manière indiquée à l'aide de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, l'expression générale de nos polynomes sera

$$\begin{aligned} &\lambda_1(\omega_r - k_1\omega_{r+1} - k_2\omega_{r+2} - \ldots - k_{2p-r}\omega_{2p}) + \ldots \\ &\qquad\qquad + \lambda_r(\omega_r - l_1\omega_{r+1} - \ldots - l_{2p-r}\omega_{2p}), \end{aligned}$$

les $k, \ldots, l$ étant des nombres rationnels : les coefficients des λ sont r polynomes nécessairement indépendants, puisque les ω forment un système de solutions distinctes de E.

7. Il ne sera pas sans intérêt de faire une vérification directe pour $p = 2$. Écrivons la substitution σ sous la forme

$$\begin{aligned}
\omega'_1 &= a_1\omega_1 + b_1\omega_2 + c_1\omega_3 + d_1\omega_4,\\
\omega'_2 &= a_2\omega_1 + b_2\omega_2 + c_2\omega_3 + d_2\omega_4,\\
\omega'_3 &= a_3\omega_1 + b_3\omega_2 + c_3\omega_3 + d_3\omega_4,\\
\omega'_4 &= a_4\omega_1 + b_4\omega_2 + c_4\omega_3 + d_4\omega_4.
\end{aligned}$$

Cette substitution effectuée à la fois sur les ω et les υ transformant en elle-même la forme bilinéaire

$$\omega_1\upsilon_2 - \omega_2\upsilon_1 + \omega_3\upsilon_4 - \omega_4\upsilon_3,$$

on aura les relations

$$\begin{aligned}
a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 &= 1,\\
c_1d_2 - c_2d_1 + c_3d_4 - c_4d_3 &= 1,\\
a_1c_2 - a_2c_1 + a_3c_4 - a_4c_3 &= 0,\\
a_1d_2 - a_2d_1 + a_3d_4 - a_4d_3 &= 0,\\
b_1c_2 - b_2c_1 + b_3c_4 - b_4c_3 &= 0,\\
b_1d_2 - b_2d_1 + b_3d_4 - b_4d_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Le système des équations (2) est ici

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned}
P_1 &= a_1P_1 + b_1P_2 + c_1P_3 + d_1P_4,\\
P_2 &= a_2P_1 + b_2P_2 + c_2P_3 + d_2P_4,\\
P_3 &= a_3P_1 + b_3P_2 + c_3P_3 + d_3P_4,\\
P_4 &= a_4P_1 + b_4P_2 + c_4P_3 + d_4P_4
\end{aligned}\right.$$

et le système des équations (3) est

$$(\beta)\qquad \left\{\begin{aligned}
\lambda_1 &= a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + a_4\lambda_4,\\
\lambda_2 &= b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 + b_4\lambda_4,\\
\lambda_3 &= c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3 + c_4\lambda_4,\\
\lambda_4 &= d_1\lambda_1 + d_2\lambda_2 + d_3\lambda_3 + d_4\lambda_4.
\end{aligned}\right.$$

Ce sont les systèmes (α) et (β) que nous avons à comparer. Or, si l'on pose, dans les équations (α),

$$\begin{aligned}
P_1 &= -Q_2, \qquad & P_3 &= -Q_4,\\
P_2 &= Q_1, \qquad & P_4 &= Q_3,
\end{aligned}$$

on a les équations du type des équations (5)

$$(\gamma)\quad \left\{\begin{aligned} Q_1 &= b_2 Q_1 - a_2 Q_2 + d_2 Q_3 - c_2 Q_4,\\ Q_2 &= -b_1 Q_1 + a_1 Q_2 - d_1 Q_3 + c_1 Q_4,\\ Q_3 &= +b_4 Q_1 - a_4 Q_2 + d_4 Q_3 - c_4 Q_4,\\ Q_4 &= -b_3 Q_1 + a_3 Q_2 - d_3 Q_3 + c_3 Q_4\end{aligned}\right.$$

et l'on trouve les équations correspondant aux équations $(5)'$ en résolvant les équations (γ) par rapport aux lettres Q qui sont dans le second membre et en se servant des relations entre les a, b, c, d. On a ainsi

$$\begin{aligned} Q_1 &= a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + a_3 Q_3 + a_4 Q_4,\\ Q_2 &= b_1 Q_1 + b_2 Q_2 + b_3 Q_3 + b_4 Q_4,\\ Q_3 &= c_1 Q_1 + c_2 Q_2 + c_3 Q_3 + c_4 Q_4,\\ Q_4 &= d_1 Q_1 + d_2 Q_2 + d_3 Q_3 + d_4 Q_4.\end{aligned}$$

Ces dernières équations sont les équations (β) quand on pose

$$\lambda_1 = Q_1, \qquad \lambda_2 = Q_2, \qquad \lambda_3 = Q_3, \qquad \lambda_4 = Q_4$$

et cela est bien conforme à la démonstration générale du paragraphe précédent. La vérification est donc complète.

8. Le théorème général, qui vient d'être établi sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce, aurait pu être démontré par une autre voie. D'après ce que nous avons vu antérieurement, la recherche des intégrales de différentielles totales de seconde espèce peut être faite de la manière suivante. Soient, comme habituellement, $2p$ intégrales distinctes de seconde espèce

$$I_h = \int \frac{Q_h(x, y, z)\,dx}{f'_z} \qquad (h = 1, 2, \ldots, 2p)$$

de la courbe entre x et z

$$f(x, y, z) = 0;$$

désignons par

$$\omega_1^h, \quad \omega_2^h, \quad \ldots, \quad \omega_{2p-1}^h, \quad \omega_{2p}^h$$

les $2p$ périodes de I_h prises suivant le système des p rétrosections (C, D) de Riemann, un ω d'indice impair et le suivant cor-

respondant respectivement aux parties C et D de la rétrosection. On doit considérer le système d'équations en a

$$(\mathrm{S}) \qquad a_1 \omega_k^1 + a_2 \omega_k^2 + \ldots + a_{2p} \omega_k^{2p} = \mathrm{P}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2p),$$

les P étant des constantes satisfaisant aux relations rappelées plus haut. Ces équations donnent, pour les a, des fonctions rationnelles de y.

Rappelons-nous maintenant que, si l'on a les périodes

$$\begin{array}{lllll} \omega_1^h, & \omega_2^h, & \ldots, & \omega_{2p-1}^h, & \omega_{2p}^h, \\ \omega_1^{h'}, & \omega_2^{h'}, & \ldots, & \omega_{2p-1}^{h'}, & {}_{2p}^{h'} \end{array}$$

correspondant à deux intégrales I_h et $\mathrm{I}_{h'}$, l'expression

$$\omega_1^h \omega_2^{h'} - \omega_2^h \omega_1^{h'} + \ldots + \omega_{2p-1}^h \omega_{2p}^{h'} - \omega_{2p}^h \omega_{2p-1}^{h'}$$

reste invariable par les substitutions du groupe tant de fois considéré et est, par suite, un polynome en y. On déduit alors des équations (S) que la combinaison

$$(\delta) \qquad \mathrm{P}_1 \omega_2^h - \mathrm{P}_2 \omega_1^h + \ldots + \mathrm{P}_{2p-1} \omega_{2p}^h - \mathrm{P}_{2p} \omega_{2p-1}^h$$

est une fonction rationnelle de y et, par suite, un polynome, puisque autour d'un point singulier $y = b$ elle est nécessairement de la forme

$$\lambda(y) + \mu(y) \log(y - b),$$

λ et μ étant holomorphes, et qu'il faut alors que $\mu(y)$ soit identiquement nul. Si donc il y a r arbitraires parmi les constantes P, il y aura r combinaisons distinctes (δ) qui donneront des polynomes; par conséquent, l'*équation* E *admettra comme solutions* r *polynomes distincts*.

Le même raisonnement démontre la réciproque. Supposons qu'il y ait r expressions (δ) distinctes se réduisant à des polynomes pour des valeurs des constantes P (bien entendu, quel que soit $h = 1, 2, \ldots, 2p$). Le système des équations (S) peut être remplacé par un système équivalent Σ de la forme

$$(\Sigma) \qquad a_1 \pi_k^1 + a_2 \pi_k^2 + \ldots + a_{2p} \pi_k^{2p} = \mathrm{U}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2p),$$

les π et les U étant des polynomes en y; de là on tire pour les a

des fractions rationnelles de y. A chaque système de valeurs convenables des constantes P correspond donc une intégrale de différentielle totale de seconde espèce, *ce qui démontre la réciproque*.

J'ajoute quelques remarques importantes sur les périodes des I. D'après le § II, il y a $2p-r$ quantités Ω linéairement indépendantes, soient

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p-r}.$$

Quand la variable y partant d'un point y revient, une substitution linéaire à coefficients entiers se trouve effectuée sur les Ω. Celles-ci satisfont à une équation linéaire d'ordre $2p-r$ à coefficients rationnels [1]. Outre les $2p-r$ cycles, correspondant à ces Ω, de la surface de Riemann $f(x, \bar{y}, z) = 0$, il y a r autres cycles qui correspondent précisément aux r polynomes dont il vient d'être question; ces r cycles ne se modifient pas par une circulation de y.

Considérons maintenant les équations analogues à (S), donnant les a, en supposant que les périodes

$$\omega_1^h, \quad \omega_2^h, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}^h$$

soient relatives aux cycles ci-dessus : soient

$$(\alpha) \qquad \omega_1^h, \quad \omega_2^h, \quad \ldots, \quad \omega_{2p-r}^h$$

pour les $2p-r$ d'abord considérés, et

$$(\beta) \qquad \omega_{2p-r+1}^h, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}^h$$

pour les r derniers. Écrivons alors de nouveau les équations

$$(\mathrm{S}') \qquad a_1\omega_k^1 + a_2\omega_k^2 + \ldots + a_{2p}\omega_k^{2p} = \mathrm{P}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Il est très facile de voir ce que doivent être les constantes P_k, pour que les a tirés de (S) soient rationnels en y. Les expressions (α) étant transformées par des substitutions linéaires les concernant seules, et les expressions (β) n'étant pas modifiées, *on aura né-*

---

[1] Au lieu de l'équation différentielle linéaire E on pourrait donc considérer l'équation différentielle linéaire E_0 d'ordre $2p-r$ à laquelle satisfont les Ω ; nous reviendrons sur l'équation E_0 au Chapitre suivant.



cessairement

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_{2p-r} = 0,$$

tandis que $P_{2p-r+1}, \ldots, P_{2p}$ *sont des constantes arbitraires.*

II.

Sur le nombre des périodes de certaines intégrales doubles.

9. Nous venons d'étudier, dans la Section précédente, l'équation E à laquelle satisfont les périodes de l'intégrale abélienne de *seconde espèce*

$$\int \frac{Q(x, y, z)\,dx}{f'_z}.$$

Nous avons envisagé précédemment (par exemple, t. II, p. 217 et 351) une autre équation différentielle linéaire qui a été appelée E'; c'est l'équation à laquelle satisfont les périodes de l'intégrale abélienne arbitraire (n'étant pas nécessairement de seconde espèce)

$$\int \frac{P(x, y, z)\,dx}{f'_z}, \tag{6}$$

P passant toujours par la courbe double.

Cette équation est d'ordre

$$2p + m - 1$$

et, parmi les périodes de (6), se trouvent $m - 1$ polynomes.

Qu'arrive-t-il pour l'équation E' quand la surface possède r intégrales de différentielles totales de seconde espèce? Il y a, pour l'équation E', une intégrale particulière relative à chaque point critique b_i que nous continuons à dénommer Ω_i.

Nous allons montrer que, *parmi les* Ω_i, *il y en a*

$$2p + m - 1 - r$$

linéairement indépendantes, et inversement, s'il y a

$$2p + m - 1 - r$$

Ω *linéairement indépendants, la surface possède r intégrales simples de seconde espèce.* C'est une propriété de l'équation E' analogue à la propriété de l'équation E démontrée au n° 2 de ce Chapitre.

10. Parmi les Ω il y en a certainement au moins $2p-r$ linéairement indépendants, c'est-à-dire qui correspondent à des cycles distincts sur la surface de Riemann relative à l'équation entre x et z

$$f(x, y, z) = 0,$$

puisqu'il en est ainsi dans le cas de l'équation E. Désignons par

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p-r}$$

les Ω correspondant à ces cycles. A ces $2p-r$ périodes de (6) adjoignons r autres périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ correspondant sur la surface de Riemann à des cycles formant, avec les cycles qui sont relatifs aux Ω précédents, un système complet sur la surface de Riemann. Nous aurons alors pour l'équation E' les $2p+m-1$ intégrales indépendantes

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p-r}, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_r, \quad \pi_2, \quad \ldots, \quad \pi_m,$$

les π désignant, comme dans tout le Chapitre XI (t. II), les polynomes correspondant aux points logarithmiques à l'infini.

Soient maintenant

$$(7) \qquad \Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p-r}, \quad \Omega_{2p-r+1}, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p+m-1-\tau},$$

$2p+m-1-\tau$ fonctions Ω linéairement indépendantes, formées des $2p-r$ fonctions Ω déjà considérées et d'un certain nombre d'autres. Ces dernières, que nous avons désignées par

$$(8) \qquad \Omega_{2p-r+1}, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p+m-1-\tau},$$

correspondent à des cycles de la surface de Riemann qui, sur celle-ci regardée comme fermée, se ramènent aux cycles relatifs à Ω_1, $\Omega_2, \ldots, \Omega_{2p-r}$; par suite, les expressions (8) s'expriment linéairement à l'aide de

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p-r}, \quad \pi_2, \quad \ldots, \quad \pi_m.$$



Soient ainsi

$$(9)\qquad \Omega_h = \lambda_1^h\Omega_1 + \lambda_2^h\Omega_2 + \ldots + \lambda_{2p-r}^h\Omega_{2p-r} + \mu_2^h\pi_2 + \ldots + \mu_m^h\pi_m$$
$$(h = 2p - r + 1,\ \ldots,\ 2p + m - 1 - \tau),$$

les λ et les μ étant rationnels. Le nombre des équations (9), c'est-à-dire

$$m - 1 - \tau + r,$$

doit être au plus égal à $m - 1$, car, autrement, on aurait une relation linéaire entre les fonctions (7), ce qui n'a pas lieu; on a donc nécessairement

$$\tau \geqq r.$$

Ajoutons encore que, si l'on envisage les équations avec les indéterminées c

$$\mu_2^h c_2 + \ldots + \mu_m^h c_m = 0 \qquad (h = 2p - r + 1,\ \ldots,\ 2p + m - 1 - \tau),$$

on pourra certainement y satisfaire, les c n'étant pas tous nuls (sauf dans le cas où $\tau = r$) et, sur les c, on pourra certainement en prendre $\tau - r$ arbitrairement.

Nous voulons précisément démontrer que τ *est égal à* r. D'après ce qui précède, il faut montrer que τ n'est pas supérieur à r.

11. Plaçons-nous donc dans l'hypothèse $\tau > r$. Nous n'avons à peu près qu'à généraliser l'analyse de la page 381 (t. II) s'appliquant à la même question, mais dans le cas où $r = 0$.

Reprenons les intégrales (*loc. cit.*)

$$\int \mathrm{I}_1\,dx,\quad \ldots,\quad \int \mathrm{I}_{2p}\,dx,\quad \int \mathrm{J}_2\,dx,\quad \ldots,\quad \int \mathrm{J}_m\,dx$$

avec les

$$\Omega_i^h,\quad \Upsilon_i^k \qquad (h = 1, 2, \ldots, 2p;\ k = 2, \ldots, m),$$

l'indice i étant relatif au cycle. Envisageons, en outre, les périodes

$$\omega_j^h,\quad \upsilon_j^k$$

correspondant, pour les intégrales précédentes, à $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$. Les périodes de l'intégrale abélienne

$$\int (a_1\mathrm{I}_1 + \ldots + a_{2p}\mathrm{I}_{2p} + c_2\mathrm{J}_2 + \ldots + c_m\mathrm{J}_m)\,dx$$

ne dépendront pas de y, si les c sont des constantes et si les a (pouvant dépendre de y) et les constantes c satisfont aux conditions suivantes (où les C_j sont des constantes arbitraires)

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{c} a_1 \Omega_i^1 + a_2 \Omega_i^2 + \ldots + a_{2p} \Omega_i^{2p} + c_2 \Upsilon_i^2 + \ldots + c_m \Upsilon_i^m = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, 2p - r), \\ a_1 \omega_j^1 + a_2 \omega_j^2 + \ldots + a_{2p} \omega_j^{2p} + c_2 \upsilon_j^2 + \ldots + c_m \upsilon_j^m = C_j \\ (j = 1, 2, \ldots, r), \\ \mu_2^h c_2 + \ldots + \mu_m^h c_m = 0 \\ (h = 2p - r + 1, \ldots, 2p + m - 1 - \tau). \end{array} \right.$$

Si les a et les c satisfont à toutes ces conditions, on aura nécessairement, d'après les équations (9),

$$a_1 \Omega_h^1 + a_2 \Omega_h^2 + \ldots + a_{2p} \Omega_h^{2p} + c_2 \Upsilon_h^2 + \ldots + c_m \Upsilon_h^m = 0$$
$$(h = 2p - r + 1, \ldots, 2p + m - 1 - \tau).$$

Il est aisé de voir que l'on peut satisfaire à toutes les conditions Σ. Les équations de la troisième ligne dans Σ font connaître les c, dont $\tau - r$ restent arbitraires; les deux premières lignes, dont le nombre total est $2p$, déterminent les a. Ceux-ci sont bien des fonctions rationnelles de y. En effet, les équations ne changent pas quand y décrit un contour fermé quelconque. Ceci est immédiat quand y tourne autour d'un des points singuliers $b_1, b_2, \ldots, b_{2p-r}$, et pour les points

$$b_{2p-r+1}, \quad \ldots, \quad b_{2p+m-1-\tau}$$

c'est une conséquence des équations (9) et de la troisième ligne des relations Σ. Quant aux autres points critiques, les Ω qui leur correspondent étant fonctions linéaires des $2p + m - 1 - \tau$ premiers, la chose est manifeste.

Il n'y a plus maintenant qu'à raisonner comme à la page 382 (t. II). On formera en se servant de l'intégrale

$$\int (a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_2 J_2 + \ldots + c_m J_m)\, dx$$

une intégrale de différentielle totale de la surface de nature transcendante (puisque tous les c ne sont pas nuls) et n'ayant aucune ligne logarithmique à distance finie; de plus, puisque tous les c ne

sont pas nuls, elle ne sera pas une intégrale de seconde espèce. Or ceci est impossible, et cette contradiction montre que l'hypothèse $\tau > r$ est inadmissible; *on a donc*

$$\tau = r.$$

C'est le théorème que nous avons énoncé (nº 6).

12. Que devient la démonstration précédente, quand $\tau = r$. Les équations

$$\mu_2^h c_2 + \ldots + \mu_m^h c_m = 0 \qquad (h = 2p - r + 1, \ldots, 2p + m - 1 - r)$$

sont alors en nombre $m - 1$, et elles donneront pour tous les c la valeur *zéro*. Il est impossible, en effet, que le déterminant des μ soit nul, car alors, d'après les équations (9), les Ω de la ligne (7) ne seraient pas linéairement indépendants. Tous les c étant nuls, l'analyse du paragraphe précédent conduit à une intégrale de différentielle totale de seconde espèce, avec les r arbitraires

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_r,$$

ce qui est bien d'accord avec le fait que la surface a r intégrales distinctes de différentielles totales de seconde espèce.

13. Prenons maintenant l'intégrale double

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

le polynome $P(x, y, z)$ étant uniquement assujetti à passer par la courbe double. D'après l'étude faite dans la Section II du Chapitre XI (t. II, p. 351), et en nous servant des résultats précédents, nous sommes assuré que, si la surface n'a pas d'intégrales de différentielles totales de seconde espèce, *il y a* $2p + m - 1$ *fonctions* Ω *linéairement indépendantes, et, par suite, un nombre de périodes (au sens où nous les avons entendues dans toutes nos recherches antérieures) égal à*

$$N - 2p - (m - 1).$$

C'est le théorème fondamental de la page 354 (t. II). Que devient ce résultat, quand la surface a, comme ci-dessus, r intégrales

de différentielles totales de seconde espèce? Il y a alors seulement, comme il vient d'être établi,

$$2p + m - 1 - r$$

Ω linéairement indépendants. On voit bien facilement la modification que ceci amène dans tous les raisonnements. *Le nombre des périodes est alors égal à*

$$N - (2p + m - 1 - r),$$

c'est-à-dire

$$N - 2p - (m - 1) + r.$$

On trouve ces périodes par les mêmes combinaisons que plus haut, et l'on démontre par la même voie leur indépendance.

III.

Sur le nombre des conditions exprimant qu'une intégrale double est de seconde espèce.

14. Nous avons recherché précédemment (t. II, p. 210) quel est le nombre des conditions exprimant qu'*une intégrale double de la forme*

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z} \tag{10}$$

est de seconde espèce. Nous avons trouvé que ce nombre est au plus égal à $2p$.

Ce résultat a été ensuite précisé (t. II, p. 328), et il a été démontré que *ce nombre est certainement égal à $2p$, quand l'équation* E *n'admet pas comme solution un polynome.*

Nous sommes maintenant en mesure d'approfondir encore davantage la question et d'arriver à un résultat définitif.

15. Supposons que la surface admette r intégrales de différentielles totales de seconde espèce. Nous avons vu (Section I) que l'équation E admet comme solutions r polynomes linéairement indépendants. Que va-t-il arriver pour l'équation E'? Nous allons

montrer qu'*elle admet comme solutions r polynomes en y, en outre des $m-1$ polynomes correspondant aux points à l'infini.*

Dans le voisinage d'un point singulier b, l'équation E′ admettra le système fondamental qui pourra être formé des fonctions

$$\omega'_1, \quad \omega'_2, \quad \ldots, \quad \omega'_{2p-1}, \quad \omega'_{2p}, \quad \pi_2, \quad \ldots, \quad \pi_m,$$

les π étant des polynomes, les ω' étant tous holomorphes autour de b, sauf l'un d'eux ω'_{2p} qui a un point singulier logarithmique en b. A ces ω' correspondent $2p$ cycles distincts sur la surface de Riemann.

D'autre part, si nous revenons à l'équation E, elle admettra autour de b le système fondamental

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2p-1}, \quad \omega_{2p},$$

les ω correspondant aux mêmes cycles que les ω', et étant holomorphes autour de b, sauf le dernier ω_{2p}.

On peut associer deux à deux les intégrales des équations E′ et E, nous voulons dire les intégrales de E′ et E correspondant à un même cycle. Soit, pour une valeur non singulière A de y (et son voisinage), deux intégrales

$$u' \quad \text{et} \quad u,$$

ainsi associées et correspondant à un cycle Γ; allons dans le plan de y par un chemin déterminé du point A à un point β voisin du point singulier b. On aura, en β,

$$\begin{aligned} u' &= h_1\omega'_1 + h_2\omega'_2 + \ldots + h_{2p}\omega'_{2p} + k_2\pi_2 + \ldots + k_m\pi_m, \\ u &= h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + \ldots + h_{2p}\omega_{2p}, \end{aligned}$$

les h et les k étant des entiers; il est essentiel de remarquer que les h sont les mêmes pour u' et pour u, mais que pour u il y aura en général de plus des termes en π, car il est possible que le passage du cycle Γ aux cycles correspondant aux ω (et aux ω') se fasse en traversant des points à l'infini, et c'est de là que proviennent les termes en π.

Ceci posé, supposons que le cycle Γ corresponde à une solution de E qui soit un polynome. L'intégrale u étant dans ces conditions un polynome, il faudra nécessairement que, dans l'expression de u, à l'aide des ω, on ait

$$h_{2p} = 0$$

pour que b ne soit pas un point singulier logarithmique. Mais alors u' sera aussi holomorphe autour du point b. Celui-ci étant un point singulier quelconque, u' sera holomorphe autour de tous les points singuliers et, *par suite, sera un polynome.*

Ainsi, à tout polynome vérifiant l'équation E, correspond un polynome vérifiant l'équation E'. La réciproque résulte d'ailleurs de la même analyse. *Nous aurons donc comme solutions distinctes de l'équation* E', *en dehors des* $m-1$ *polynomes* π, *un nombre de polynomes précisément égal à* r, *comme il a été énoncé.*

16. Il résulte de là que les résidus de l'intégrale double

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

relatifs à la courbe à l'infini, ne sont pas en nombre supérieur à $2p-r$. Ces résidus sont en effet égaux aux valeurs des intégrales

$$\int \omega'_i(y)\, dy \quad \text{et} \quad \int \pi_k(y)\, dy$$

prises autour du point à l'infini, *et il ne peut* y *en avoir manifestement plus de* $2p-r$ *distinctes.*

Il faut montrer maintenant que l'on peut choisir le polynome $P(x, y, z)$ (passant bien entendu par la courbe double) figurant dans (6), de manière que ces $2p-r$ résidus aient telles valeurs que l'on veut. Il sera par cela même établi que *le nombre des conditions, exprimant que l'intégrale double* (10) *est de seconde espèce, est précisément* $2p-r$.

17. Nous n'avons qu'à raisonner à peu près comme à la page 328 (t. II) quand nous avons démontré ce théorème pour $r=0$. Prenons une intégrale (10) déterminée d'ailleurs arbitrairement, et soient, autour de $y=\infty$, les développements

$$\omega_i = \alpha_i^n y^n + \alpha_i^{n-1} y^{n-1} + \ldots + \frac{\alpha_i^{-1}}{y} + \frac{\alpha_i^{-2}}{y^2} + \ldots + \frac{\alpha_i^{-k}}{y^k} + \ldots \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots, \\ 2p-r \end{pmatrix}.$$

Pour k pris assez grand, les $2p-r$ expressions linéaires

$$(11) \qquad a_1\alpha_i^{-k} + a_2\alpha_i^{-(k-1)} + \ldots + a_k\alpha_i^{-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, 2p-r)$$



aux indéterminées

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k$$

sont linéairement indépendantes; car si, pour toute valeur de k, ces expressions linéaires n'étaient pas indépendantes, tous les déterminants d'ordre $2p - r$ formés avec les α_i^{-h} seraient nuls, et l'on pourrait former une combinaison linéaire des ω_i se réduisant à un polynome, ce qui est impossible. Le nombre k étant pris donc de manière que les expressions (11) soient distinctes, envisageons l'intégrale double

$$\int\int \frac{\varphi(y)\,P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

où l'on pose

$$\varphi(y) = a_1 y^{k-1} + a_2 y^{k-2} + \ldots + a_{k-1} y + a_k,$$

les a étant des indéterminées. Les $2p - r$ résidus de cette intégrale double sont, au facteur $2\pi i$ près, les expressions (11).

D'après ce qui précède, on peut choisir les indéterminées a de manière que ces expressions aient telles valeurs que l'on veut. Le théorème énoncé est donc établi, c'est-à-dire que :

Le nombre des conditions exprimant qu'une intégrale double de la forme (10) *est de seconde espèce, est exactement égal à* $2p - r$.

Si nous revenons au nombre p, relatif à la connexion linéaire de la surface, on a

$$r = p_1 - 1$$

et le nombre des conditions est $2p - (p_1 - 1)$. Ce résultat va nous être très utile pour obtenir le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce quand p_1 est supérieur à *un*.

IV.

Calcul général du nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes.

18. De tout ce qui précède, il résulte que la formule fondamentale

$$(12) \qquad \rho_0 = N - 4p - (m - 1) - (\rho - 1),$$

établie (t. II, p. 373), sauf pour certains cas réservés, *est toujours applicable quand la connexion linéaire est égale à l'unité.*

Il nous reste à examiner le cas où la connexion linéaire est supérieure à *un*, c'est-à-dire quand il y a un nombre r d'intégrales de seconde espèce ($r > 0$). La question sera facile, avec les résultats des sections précédentes.

Les deux points essentiels dans l'établissement de la formule ci-dessus ont été les suivants : en premier lieu, l'expression

$$N - 2p - (m - 1)$$

du nombre des périodes (au sens où nous entendons ce mot) de l'intégrale double du type toujours considéré

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

et, en second lieu, le nombre des conditions exprimant que l'intégrale double considérée est de seconde espèce, nombre égal à

$$2p.$$

La différence de ces deux nombres donne le nombre ρ_0, à l'expression près $\rho - 1$, dont l'origine n'a rien à voir avec la connexion linéaire.

Ces deux nombres doivent être modifiés comme nous l'avons vu dans les numéros précédents; le premier est à remplacer (n° **13**) par

$$N - 2p - (m - 1) + r,$$

et le second doit être remplacé (n° **17**) par

$$2p - r.$$

En faisant la différence de ces deux nombres, nous trouvons

$$N - 4p - (m - 1) + 2r,$$

et, par suite, la formule (12) doit être remplacée par la suivante :

$$\rho_0 = N - 4p - (m - 1) + 2r - (\rho - 1).$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat fondamental suivant :

Le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde

espèce est donné par la formule

$$\rho_0 = N - 4p - (m - 1) + 2r - (\rho - 1).$$

Je rappelle la signification des lettres autres que r figurant dans cette formule : N est la classe de la surface, p le genre d'une section plane arbitraire, m le degré de la surface ; quant à ρ, c'est le nombre relatif à la surface, tel qu'il est défini par le théorème fondamental sur les intégrales de différentielles totales de *troisième* espèce et dont je rappelle la définition : On peut tracer sur la surface ρ courbes algébriques irréductibles C, telles qu'il n'y ait pas d'intégrale de différentielle totale de troisième espèce n'ayant d'autres courbes logarithmiques que la totalité ou une partie des courbes C, mais telles que, si on leur adjoint une autre courbe algébrique irréductible quelconque de la surface, il y ait une intégrale de troisième espèce n'ayant comme courbes logarithmiques que cette dernière courbe et la totalité ou une partie des courbes C.

19. Dans toutes ces études, il a été supposé que la surface n'avait que les singularités dites *ordinaires,* c'est-à-dire *une* courbe double avec points *triples* sur cette courbe qui ne présente d'ailleurs aucune particularité exceptionnelle. C'est dans ces conditions qu'ont été établies toutes les formules des pages précédentes.

Si, outre ces singularités, la surface possédait des points doubles coniques isolés, la complication ainsi introduite ne serait pas grande ; nous allons examiner ce cas.

Il nous faut revenir aux singularités de l'équation (E), que nous avons discutées dans le Tome I (p. 95 et suivantes). La surface étant rapportée à des axes placés arbitrairement, les points singuliers correspondaient aux valeurs b telles que le plan $y = b$ fût tangent à la surface. Maintenant, aux véritables plans tangents parallèles au plan des xz, c'est-à-dire aux plans tangents en des points simples de la surface, il faut ajouter les plans parallèles au plan des xz passant par les points doubles isolés. Un tel plan, que nous désignerons par $y = c$, correspond bien à un point singulier de l'équation (E) ; pour y voisin de c, la courbe entre x et z

$$f(x, y, z) = 0$$

a deux points de ramification voisins, qui se confondent avec le

point double isolé de la surface. Les circonstances seront donc les mêmes que pour le plan $y = b$. Les points c sont, pour l'équation (E), des points singuliers logarithmiques de même nature que les points b [1]. Donc, en désignant toujours par N la classe de la surface et d le nombre des points doubles *isolés,* le nombre total des points singuliers de (E) sera

$$N + d.$$

On se rappelle d'ailleurs que l'intégrale double

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

restera finie à distance finie, pourvu que le polynome Q s'annule sur la courbe double; aucune condition n'est relative aux points doubles isolés (points coniques), comme on l'a vu (t. I, p. 184).

Il résulte de là que, dans tous les calculs et tous les raisonnements faits dans ce Chapitre et les précédents, N doit seulement être remplacé par $N + d$. *Nous aurons donc, au lieu de la formule donnée au n° 18, la formule plus générale, relative au cas où la surface a, outre la ligne double, d points doubles isolés*

$$\rho_0 = N + d - 4p - (m - 1) + 2r - (\rho - 1).$$

Telle est l'expression générale du nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce. Quant *au nombre des périodes telles que nous les envisageons, de l'intégrale double*

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

où le polynome Q est assujetti seulement à passer par la courbe double, *il est égal à*

$$N + d - 2p - (m - 1) + r,$$

qui est le nombre du n° 13, en remplaçant N par $N + d$.

---

(1) Il y a seulement la différence suivante par rapport à ce que nous avons vu (t. I, p. 97) : Pour un point b, nous avions une certaine intégrale holomorphe qui a été désignée plus tard par Ω, et toute période de l'intégrale envisagée se reproduisait, après une circulation autour de b, à un multiple près de Ω; ce multiple pouvait être de parité quelconque (il pouvait être notamment égal à Ω). Pour un point c, le multiple sera toujours *pair;* mais cela n'a aucune importance pour toutes les déductions relatives au nombre ρ_0.



V.

Sur certaines expressions invariantes.

20. Le nombre ρ_0, dont nous venons de donner ici l'expression générale, est *un invariant absolu* de la surface, comme il a été vu précédemment. Si donc l'on considère deux surfaces f et f' se correspondant point par point, et ayant seulement chacune comme singularités une ligne double avec points triples, et, en outre, des points doubles isolés, on aura, en marquant par un accent les lettres relatives à la surface f',

$$\rho_0 = \rho'_0,$$

et, par suite, puisque évidemment $r = r'$,

$$N + d - 4p - (m-1) - \rho = N' + d' - 4p' - (m'-1) - \rho'.$$

Cette formule appelle plusieurs remarques intéressantes.

21. Supposons que, dans la substitution qui transforme f en f', il y ait F points fondamentaux A (points simples ou points doubles isolés) sur f, et F′ points fondamentaux A′ (points simples ou points doubles isolés) sur f'. Nous allons facilement obtenir une relation entre ρ, ρ', F et F′.

D'après la définition de ρ, on peut tracer, sur f, ρ courbes algébriques irréductibles C (qu'on peut supposer ne pas passer par les points A) telles qu'il n'y ait pas d'intégrales de troisième espèce n'ayant d'autres courbes logarithmiques que la totalité ou une partie des courbes C, mais telles que, si on leur adjoint une autre courbe algébrique irréductible quelconque de la surface, il y ait une intégrale de troisième espèce n'ayant comme courbes logarithmiques que cette dernière courbe et la totalité ou une partie des courbes C.

Ceci posé, envisageons sur f' les courbes

$$C'_1, \quad C'_2, \quad \ldots, \quad C'_\rho$$

correspondant à

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_\rho.$$

Aux points A de f correspondront sur f' des courbes Φ' en nombre F, et aux points A' de f' correspondront sur f des courbes Φ en nombre F'. On peut former, pour la surface f, F' intégrales de troisième espèce $K_1, K_2, \ldots, K_\rho$ correspondant aux courbes C et à chacune des courbes Φ. Ces intégrales, sur la surface f', ont en totalité ou en partie, comme lignes logarithmiques, les courbes C' et Φ' (qui sont en nombre $\rho + F$). Désignons-les, sur la surface f', par

$$K'_1, \quad K'_2, \quad \ldots, \quad K'_{F'}.$$

Il n'est pas possible que

$$F + \rho < F',$$

car alors on pourrait former (en annulant les périodes logarithmiques) une combinaison linéaire

$$A_1 K'_1 + A_2 K'_2 + \ldots + A_{F'} K'_{F'},$$

où les A ne seraient pas tous nuls, et qui n'aurait pas de courbes logarithmiques sur f', tandis qu'elle en aurait sur f. Concevons maintenant que l'on forme le tableau des périodes logarithmiques de

$$K'_1, \quad K'_2, \quad \ldots, \quad K'_{F'},$$

pour les courbes

$$C'_1, \quad C'_2, \quad \ldots, \quad C'_\rho \qquad \Phi'_1, \quad \Phi'_2, \quad \ldots, \quad \Phi'_{F'},$$

en mettant sur une même ligne horizontale les périodes correspondant à une même courbe. Il n'est pas possible, pour la même raison que plus haut, que *tous* les déterminants d'ordre F' formés avec F' lignes de ce tableau soient nuls. Soient donc, parmi les C' et les Φ', des courbes que nous appellerons Γ en nombre F', pour lesquelles le déterminant correspondant n'est pas nul.

Nous allons montrer aisément que, si des C' et Φ' on supprime les Γ, on a

$$\rho + F - F'$$

courbes Γ', pouvant être prises pour les ρ' courbes de f' répondant sur cette surface au théorème fondamental sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce, de sorte que l'on aura

$$\rho' = \rho + F - F'.$$

En effet, tout d'abord il n'y aura pas d'intégrale de troisième espèce correspondant aux courbes Γ', car, en revenant à f, l'on voit qu'une telle intégrale serait nécessairement de la forme

$$A_1 K'_1 + \ldots + A_{F'} K'_{F'} \qquad \text{(les A non tous nuls)},$$

et, par suite, le déterminant des périodes logarithmiques formées avec les courbes Γ serait nul.

D'autre part, soit une courbe L' quelconque de f', on peut former une intégrale de troisième espèce n'ayant d'autres courbes logarithmiques que L' et la totalité ou une partie des courbes Γ'. Si l'on revient, en effet, à f, on pourra former une intégrale correspondant à la transformée L de L' et aux courbes C; en revenant ensuite à f', on a une intégrale J', ayant comme courbes logarithmiques L' et la totalité ou une partie des courbes C' et Φ'. Formons alors la combinaison

$$J' + A_1 K'_1 + \ldots + A_{F'} K'_{F'};$$

on peut choisir les A de manière à faire disparaître dans cette combinaison, comme lignes logarithmiques, les courbes Γ (le déterminant relatif aux Γ n'étant pas nul), et il reste seulement les courbes Γ', comme nous voulions le montrer.

Nous avons donc la relation suivante, importante pour notre objet,

$$\rho + F = \rho' + F'.$$

22. Revenons maintenant à la relation du n° 20; elle pourra s'écrire

$$(13) \quad N + d - 4p - (m-1) + F = N' + d' - 4p' - (m'-1) + F'.$$

C'est une relation d'invariance relative d'une forme remarquable entre deux surfaces se correspondant point par point; il y figure, comme l'on voit, les nombres des *points fondamentaux* de la correspondance sur l'une et l'autre surface.

On vient de voir l'importance de la combinaison

$$N - 4p - (m-1),$$

dans la théorie des intégrales doubles de seconde espèce. Or cette combinaison s'est déjà présentée dans la théorie géométrique des

surfaces algébriques. Dans le Mémoire de M. Nöther [*Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde* (*Math. Annalen,* t. VIII)] on trouve (notamment p. 507) la combinaison [1]

$$n' - 2a + 3n.$$

Avec nos notations, on a

$$n' = \text{N}, \qquad n = m, \qquad a = 2(n-1) + 2p,$$

ce qui donne

$$n' - 2a + 3n = \text{N} - 4p - m + 4.$$

On trouve, à la page citée du Mémoire de M. Nöther, la formule relative à deux surfaces f et f_1 se correspondant point par point,

$$(14) \qquad n' - 2a + 3n + \Sigma\mu = n'_1 - 2a_1 + 3n_1 + \Sigma\mu_1.$$

Dans cette formule, $\Sigma\mu$ désigne la somme des multiplicités de tous les points fondamentaux de f, augmentée de la somme des multiplicités des points multiples de f qui ne sont pas points fondamentaux (tous les points multiples envisagés étant des points isolés), et pareillement pour $\Sigma\mu_1$ relativement à f_1.

Notre formule (13) coïncide avec la formule (14) de M. Nöther, sauf que, dans le cas de M. Nöther, peuvent se trouver des points multiples isolés d'ordre supérieur à *deux,* cas que nous n'avons pas examiné dans notre théorie [2].

Il est bien remarquable de voir ainsi établi un lien entre deux points de vue si différents, celui de MM. Zeuthen et Nöther et des géomètres qui les ont suivis dans l'étude géométrique des surfaces, et le point de vue transcendant auquel se rapportent nos recherches sur les périodes des intégrales doubles dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables.

---

(1) M. Zeuthen (*Math. Annalen,* t. IV, p. 37) avait déjà formé un invariant relatif analogue, qui a été aussi étudié par M. Segre. Beaucoup plus récemment, MM. Castelnuovo et Enriques ont aussi rencontré la même combinaison (*Annali di Matematica,* 1901) dans une étude remarquable sur les systèmes linéaires de courbes d'une surface.

(2) Il serait intéressant et sans difficultés réelles de combler cette lacune, mais ceci demanderait quelques développements. Il nous suffit, dans l'exposé de la théorie générale, de considérer les singularités ordinaires.

23. Nous terminerons ce Chapitre en faisant une application de la formule générale établie ci-dessus. On peut tout d'abord se demander quelle est la valeur de ρ_0 pour la surface *la plus générale* de degré m. Pour répondre à cette question, il faut avoir la valeur de ρ pour cette surface. On peut montrer que pour cette surface, quand m est au moins égal à *quatre*, on a

$$\rho = 1.$$

Ce résultat peut se déduire d'un théorème donné par M. Nöther dans son célèbre Mémoire relatif aux courbes gauches algébriques (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1882, n°s 11 et 12), à savoir que, *sur la surface la plus générale de degré* m ($m \geqq 4$), *toute courbe algébrique est l'intersection complète de la surface avec une autre surface algébrique* (¹). En effet, soit une courbe C_1 de la surface, intersection de celle-ci avec la surface de degré m_1

$$F_1(x, y, z) = 0.$$

Prenons une autre courbe quelconque C_2; celle-ci sera l'intersection de la surface avec une autre surface de degré m_2,

$$F_2(x, y, z) = 0.$$

Il suffit de prendre

$$\log \frac{F_1^{m_2}}{F_2^{m_1}}$$

pour avoir une intégrale de différentielle totale n'ayant d'autres courbes logarithmiques que C_1 et C_2; donc $\rho = 1$.

En appliquant la formule

$$\rho_0 = N - 4p - (m-1) - (\rho - 1),$$

on trouve, puisque l'on a

$$N = m(m-1)^2, \qquad p = \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

(¹) A la vérité, la démonstration de M. Nöther fondée sur une énumération de constantes ne peut être regardée que comme rendant le théorème très vraisemblable, et il y aurait lieu de revenir sur la question. On conclut encore de ce théorème que, *pour la surface la plus générale de degré* m ($m \geqq 4$), *toute intégrale de différentielle totale est une combinaison algébrico-logarithmique* (*voir* une Note de M. Picard publiée dans les *Comptes rendus*, 22 février 1904, où sont d'ailleurs indiquées diverses applications particulières sur lesquelles nous reviendrons au Chapitre XIV).

le résultat suivant

$$\rho_0 = (m-1)(m^2-3m+3)$$

comme nombre ρ_0 pour la surface *générale* de degré $m (m \geqq 4)$.

24. Nous avons déjà insisté (*voir*, par exemple, t. II, p. 323) sur la dépendance entre ρ et la *nature arithmétique* des coefficients de la surface. Aussi ne faudrait-il pas conclure de ce qui précède que l'on a $\rho = 1$ pour toute surface de degré m sans points multiples. Ainsi nous avons montré (t. II, p. 287) que, pour la surface

$$z^m = x^m + P(y) \qquad (m \geqq 4),$$

où $P(y)$ est un polynome *arbitraire* de degré m, on a

$$\rho = (m-1)^2 + 1,$$

ce qui donne

$$\rho_0 = (m-1)(m-2)^2.$$

25. Prenons encore quelques surfaces particulières. Soit la surface unicursale f définie en coordonnées homogènes par les équations

$$x_i = f_i(\alpha, \beta, \gamma) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

f_1, f_2, f_3 et f_4 étant des polynomes homogènes de degré n en α, β et γ. On suppose que les courbes

$$f_i = 0$$

aient a points simples communs ne répondant d'ailleurs à aucune disposition particulière.

On a manifestement pour la surface

$$m = n^2 - a, \qquad p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Cherchons la valeur de ρ. Aux a points *fondamentaux* du plan (α, β, γ) que nous désignerons par f' correspondent sur la surface f des courbes distinctes

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_a;$$

de plus, il n'y aura pas sur f de points fondamentaux. Appliquons la formule du n° **21**

$$\rho + F = \rho' + F';$$

on a

$$F = 0, \qquad \rho' = 1, \qquad F' = a.$$

Par suite

$$\rho = a + 1.$$

Il ne reste plus qu'à calculer la classe N de la surface; ceci est élémentaire. Les axes ayant une disposition quelconque par rapport à la surface, il suffira de chercher, la surface étant représentée par

$$x = \frac{f_1}{f_4}, \qquad y = \frac{f_2}{f_4}, \qquad z = \frac{f_3}{f_4},$$

les points de la surface où le plan tangent est parallèle au plan des yz. Ils sont donnés par les deux équations

$$\frac{\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f_4}{\partial \alpha}} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial \beta}}{\frac{\partial f_4}{\partial \beta}} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial \gamma}}{\frac{\partial f_4}{\partial \delta}},$$

dont les solutions communes sont en nombre $3(n-1)^2$; on a donc

$$N = 3(n-1)^2.$$

La formule donne alors

$$\rho_0 = 0,$$

ce qui devait être, puisque la surface est unicursale et n'a pas par suite d'intégrale double de seconde espèce qui ne se ramène à la forme

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

U et V étant rationnelles en x, y et z.

CHAPITRE XIII.

SUR LES NOMBRES DES INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES DE PREMIÈRE ET DE SECONDE ESPÈCE D'UNE SURFACE.

I.

Sur une inégalité entre r et ω_{m-3}, relative à la connexion linéaire.

1. Nous allons établir une inégalité importante relative à la connexion linéaire d'une surface. Commençons par quelques remarques concernant les courbes algébriques, d'où se déduira l'inégalité cherchée.

Tout d'abord les p intégrales abéliennes de première espèce d'une courbe algébrique ne peuvent avoir dans leur ensemble moins de $2p$ périodes; d'une manière générale, soient $(q < p)$ q intégrales de première espèce distinctes

$$I_1, \quad I_2, \quad \ldots, \quad I_q$$

d'une courbe algébrique; nous allons montrer que le nombre de leurs périodes (dans leur ensemble), ou, si l'on aime mieux, que *le nombre des périodes, arithmétiquement distinctes, d'une combinaison linéaire* ARBITRAIRE *de ces intégrales, ne peut être inférieur à* $2q$. Supposons, en effet, qu'il en soit autrement et qu'il y ait seulement $2q-s$ périodes; on pourra avoir, pour les I, un Tableau de périodes, correspondant à $2p$ cycles *distincts* de la courbe algébrique (ou de la surface de Riemann correspondante), qui sera de la forme

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
I_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,2q-s} & 0 & \ldots & 0 \\
I_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,2q-s} & 0 & \ldots & 0 \\
.. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
I_q & a_{q,1} & a_{q,2} & \ldots & a_{q,2q-s} & 0 & \ldots & 0
\end{array},$$



le nombre des *zéros* dans chaque ligne étant $2p-2q+s$. Si l'on prend maintenant d'autres intégrales de première espèce $I_{q+1}, \dots, I_p$ formant avec les $I_1, I_2, \dots, I_q$ un système de p intégrales distinctes de la même espèce, le Tableau des périodes se complétera par

$$\begin{array}{c|cccc|} I_{q+1} & b_{q+1,1} & b_{q+1,2} & \dots & b_{q+1,2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_p & b_{p,1} & b_{p,2} & \dots & b_{p,2p} \end{array}.$$

2. Ceci posé, rappelons-nous que l'on peut former, étant donnée une courbe algébrique, une intégrale de première espèce, pour laquelle les parties *réelles* des périodes relatives à $2p$ cycles distincts ont des valeurs *arbitrairement choisies;* c'est là un point classique dans la théorie de Riemann. Or formons la combinaison

$$(\alpha_1+i\beta_1)I_1+\dots+(\alpha_p+i\beta_p)I_p\,; \tag{1}$$

on doit pouvoir choisir les constantes réelles α et β de manière que les parties réelles des périodes de (1) aient telles valeurs que l'on voudra, pour les $2p$ cycles correspondant aux $2p$ colonnes verticales du Tableau ci-dessus. Or, si l'on égale à

$$2p-2q+s$$

valeurs données les parties réelles des périodes correspondant aux $2p-2q+s$ dernières colonnes du Tableau, on aura $2p-2q+s$ équations linéaires entre les inconnues

$$\alpha_{q+1},\quad \beta_{q+1},\quad \dots,\quad \alpha_p,\quad \beta_p$$

qui sont en nombre

$$2p-2q.$$

Le nombre des inconnues est inférieur de s au nombre des équations; ceci entraîne nécessairement des relations entre les parties réelles *données* des périodes, ce qui nous conduit à une contradiction. *Il est donc impossible de supposer que s est différent de zéro,* et le théorème énoncé au n° 1 est établi ([1]).

([1]) Sur cette question on peut consulter le Mémoire de M. E. Picard [*Sur la détermination du nombre des périodes des intégrales abéliennes* (*Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XI, 1883)].

3. Considérons maintenant, en premier lieu, une surface algébrique *régulière,* c'est-à-dire pour laquelle $p_g = p_n$ (*voir*, pour cette définition, t. II, p. 89). L'ensemble des adjointes d'ordre $m - 3$, de la surface donne, sur le plan

$$y = \bar{y},$$

l'ensemble des adjointes d'ordre $m - 3$ de la courbe

$$f(x, \bar{y}, z) = 0, \tag{2}$$

la surface étant, bien entendu, représentée par $f(x, y, z) = 0$.

Les intégrales de première espèce de la courbe précédente (2) seront représentées par

$$\int \frac{Q_h(x, y, z)\,dx}{f'_z} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p), \tag{3}$$

$Q_h = 0$ représentant une surface adjointe d'ordre $m - 3$ de la surface f. Je suppose que la surface admette r intégrales distinctes de seconde espèce. D'après ce que nous avons démontré antérieurement, il y a r cycles distincts (*voir* Chapitre précédent, n° 6) donnant des périodes qui s'expriment par des polynomes en y. Prenons nos intégrales (3); parmi leurs $2p$ périodes, il y en a r qui sont des polynomes en y. Or développons dans le voisinage de $y = \infty$ une période d'ailleurs quelconque de (3). Cela sera facile, en posant

$$x = x'y, \qquad z = z'y.$$

Si l'on a, en groupant par termes homogènes,

$$f(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + \ldots.$$
$$Q_h(x, y, z) = q_h(x, y, z) + \ldots,$$

on voit de suite qu'une période quelconque de (3), pour y très grand, est de la forme

$$\frac{\alpha}{y} + \frac{\beta}{y^2} + \ldots \tag{4}$$

où α représente une période de l'intégrale

$$\int \frac{q_h(x, 1, z)\,dx}{\varphi'_z} \qquad [\text{relative à la courbe } \varphi(x, 1, z) = 0].$$



Or considérons les r périodes de (3), qui sont des polynomes en y. D'après la forme précédente (4), elles sont identiquement nulles. Nous sommes donc conduits à cette conclusion, que les p intégrales (3) de première espèce ont r périodes nulles, correspondant à r cycles distincts de la courbe entre x et z représentée par $f(x, y, z) = 0$. Nous pouvons maintenant appliquer les remarques faites plus haut; la courbe précédente a toutes ses intégrales de première espèce, qui ont seulement $2p - r$ périodes. *Ceci entraîne*

$$r = 0.$$

Ainsi se trouve établi le théorème suivant :

Une surface régulière n'a pas d'intégrales de différentielles totales de seconde espèce (transcendantes).

Cet intéressant théorème a été démontré pour la première fois par M. Severi [1] en se plaçant au point de vue de la théorie géométrique des systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface. La démonstration [2] qu'on vient de lire rattache très simplement le théorème aux méthodes des Chapitres précédents.

4. Allons plus loin et appliquons le théorème préliminaire du n° 1 dans toute sa généralité. Supposons que la surface f se présente dans les conditions suivantes : elle est irrégulière, et sur un plan quelconque les adjointes d'ordre $m - 3$ de f découpent un système linéaire de courbes d'ordre $m - 3$ dépendant seulement de $p - \omega_{m-3}$ paramètres arbitraires ($\omega_{m-3} > 0$). Nous pouvons former $p - \omega_{m-3}$ intégrales distinctes de première espèce de la courbe entre x et z représentée par $f = 0$, qui seront de la forme

$$(5) \qquad \int \frac{Q_h(x, y, z)\, dx}{f'_z} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p - \omega_{m-3}),$$

où $Q_h = 0$ est une adjointe d'ordre $m - 3$ de la surface.

---

(1) F. Severi, *Sulla superficie algebriche che possegono integrali di Picard della secunda specie* (*Rendiconti della R. Academia dei Lincei,* septembre 1904).

(2) E. Picard, *Sur quelques théorèmes relatifs aux surfaces algébriques de connexion linéaire supérieure à l'unité* (*Comptes rendus,* 16 janvier 1905).

Or, en raisonnant comme ci-dessus, il est clair que l'ensemble des intégrales (5) a seulement $2p - r$ périodes arithmétiquement distinctes, puisque r périodes correspondant à des cycles distincts sont des polynomes s'annulant pour $y = \infty$, et, par suite, identiquement nuls.

Nous pouvons alors appliquer le théorème préliminaire du n° 1. Nous avons $p - \omega_{m-3}$ intégrales d'une courbe algébrique avec $2p - r$ périodes seulement; le nombre des périodes étant au moins double du nombre des intégrales, on a

$$2p - r \geqq 2(p - \omega_{m-3}),$$

c'est-à-dire

(6) $$r \leqq 2\omega_{m-3}.$$

C'est une inégalité importante (¹); comme, d'ailleurs, d'après la définition même de $p_g - p_n$ (page 88 de ce volume), on a

$$\omega_{m-3} \leqq p_g - p_n,$$

il en résulte que

(7) $$r \leqq 2(p_g - p_n).$$

Nous reviendrons à la fin de ce Chapitre sur l'inégalité (6), pour en déduire un théorème relatif aux adjointes d'une surface algébrique.

II.

Sur une propriété de l'équation linéaire E, et sur une inégalité qui s'en déduit.

5. Indiquons une propriété de l'équation différentielle linéaire E, qui va nous être très utile. En prenant $2p$ périodes distinctes

(8) $$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}$$

d'une intégrale de seconde espèce du type toujours envisagé, nous

(¹) E. Picard, *Sur une inégalité relative à la connexion linéaire et sur le calcul du genre numérique d'une surface algebrique* (*Comptes rendus*, 3 juillet 1905).



avons vu au Chapitre précédent que le groupe de l'équation E laissait invariable une expression, classique dans la théorie des fonctions abéliennes, de la forme

$$(9) \qquad \sum c_{ik}\omega_i \upsilon_k,$$

les c étant des entiers de déterminant *un* $(c_{ik} = - c_{ki})$, quand on effectue à la fois sur les ω et les υ une substitution du groupe. Or il y a r périodes, soient

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_r$$

qui sont des polynomes en y. Désignons, comme nous l'avons fait antérieurement, par

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p-r}$$

les $2p - r$ autres périodes distinctes, soumises entre elles à des substitutions linéaires par la circulation de y. Le groupe qui nous occupe a ses substitutions de la forme

$$\begin{aligned}
\omega'_1 &= \omega_1,\\
\omega'_2 &= \omega_2,\\
&\ldots\ldots\ldots,\\
\omega'_r &= \omega_r,\\
\Omega'_1 &= a_{11}\Omega_1 + a_{12}\Omega_2 + \ldots + a_{1,2p-r}\,\Omega_{2p-r},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Omega'_{2p-r} &= a_{2p-r,1}\Omega_1 + a_{2p-r,2}\Omega_2 + \ldots + a_{2p-r,2p-r}\Omega_{2p-r}.
\end{aligned}$$

Avec ces nouvelles notations, il faut considérer dans l'expression (9) que

$$\omega_{r+1}, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}$$

sont respectivement égaux à

$$\Omega_1, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p-r}.$$

Rappelons que nous avons établi (p. 397) que les Ω satisfont à une équation différentielle linéaire E_0 d'ordre $2p - r$ à coefficients rationnels en y; *en réalité, c'est l'équation* E_0 *qui joue le principal rôle dans notre théorie, plus encore que l'équation* E.

Il y a dans (9) des termes où i et k sont tous deux au plus égaux à r, d'autres termes où ils sont tous deux supérieurs à r, et enfin des termes où l'un de ces nombres est au plus égal, l'autre supérieur à r.

Soit $k \leqq r$ et $i > r$. Pour que la forme (9) soit invariante, on devra avoir la somme

$$\sum_i c_{ik}\omega_i$$

(où k reste fixe, et i varie de $r+1$ à $2p$) elle-même invariante, c'est-à-dire que la somme précédente sera une fonction uniforme de y, par suite un polynome. Mais, si r a été bien choisi, il n'y a pas de combinaison linéaire des Ω, qui se réduise à un polynome en y, sauf le cas où tous les coefficients sont nuls. On a donc nécessairement

$$c_{ik} = 0 \qquad (k \leqq r,\ i > r).$$

Donc, dans la somme (9), il y a deux catégories de termes, ceux qui dépendent des ω et ceux qui dépendent des Ω. Nous pouvons donc l'écrire sous la forme

$$(10) \qquad \sum_{ik} c_{ik}\omega_i\upsilon_k + \sum_{i'k'} c_{i'k'}\Omega_{i'}\Upsilon_{k'},$$

i et k variant de *un* à r, tandis que i' et k' varient de *un* à $2p-r$, et l'on a toujours

$$c_{ik} = -c_{ki}, \qquad c_{i'k'} = -c_{k'i'}.$$

Le déterminant total des c est égal à l'unité; or il est visiblement égal au produit des deux déterminants

$$|c_{ik}| \quad \text{et} \quad |c_{i'k'}|.$$

Ceci entraîne tout d'abord que r soit *pair*, car un déterminant symétrique gauche d'ordre impair est nul. Nous avons donc ce théorème :

Le nombre r des intégrales distinctes de différentielles totales de seconde espèce est nécessairement pair.

6. Nous pouvons encore tirer des considérations précédentes une autre conséquence. Il est d'abord bien connu qu'en effectuant sur les ω (et les υ) une substitution à coefficients entiers et de déterminant *un*, on peut ramener la première somme figurant dans (10) à la forme canonique

$$\omega_1\upsilon_2 - \omega_2\upsilon_1 + \ldots + \omega_{r-1}\upsilon_r - \omega_r\upsilon_{r-1},$$



et l'on peut avoir la forme canonique analogue pour la seconde somme. De là, nous concluons qu'*avec les r cycles correspondant aux ω, on peut faire $\frac{r}{2}$ rétrosections de Riemann*

$$(C_i,\ D_i) \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{r}{2}\right);$$

puis avec les $2p - r$ cycles correspondant aux Ω on peut faire $p - \frac{r}{2}$ rétrosections

$$(C'_k,\ D'_k) \qquad \left(k = 1, 2, \ldots, p - \frac{r}{2}\right).$$

Ce résultat précise bien la disposition de ces différents cycles.

7. Nous allons en déduire de suite une inégalité entre le nombre r des intégrales simples *de seconde espèce,* et le nombre r_0 des intégrales simples *de première espèce.* Soient

$$I_1, \quad I_2, \quad \ldots, \quad I_p$$

les p intégrales de première espèce de la courbe entre x et z, $f(x, y, z) = 0$. Si la surface a des intégrales de première espèce, on pourra trouver, d'après un raisonnement fait bien des fois, des fonctions rationnelles a_1, a_2, ..., a_p de y, telles que l'intégrale abélienne

$$a_1 I_1 + a_1 I_2 + \ldots + a_p I_p,$$

relative à la courbe précédente ait ses périodes indépendantes de y. Or, *pour une intégrale de première espèce,* on ne peut se donner que les périodes relatives à p cycles, appartenant à p rétrosections de Riemann, soient ici les C_i et les C'_k. Mais pour les C'_k les périodes de toute intégrale de différentielle totale de seconde espèce sont nécessairement nulles (ainsi que pour les D'_k); nous pouvons donc nous donner seulement tout au plus les $\frac{r}{2}$ constantes relatives aux C_i. *Ce qui nous donne l'inégalité*

$$r_0 \leq \frac{r}{2}.$$

III.

Quelques théorèmes sur les nombres des intégrales de première et de seconde espèce.

8. Établissons encore une inégalité intéressante. Tout d'abord nous ne diminuons pas la généralité en supposant qu'il s'agisse d'une surface pour laquelle

$$\omega_{m-3} = p_g - p_n,$$

c'est-à-dire pour laquelle tous les défauts ω_h (*voir* p. 88) sont nuls quand $h \leqq m-2$; ceci résulte (*voir* p. 128) de ce que l'on peut tracer sur une surface un système linéaire S de courbes, pour lequel le système adjoint découpe sur chaque courbe un groupe de points avec le défaut maximum $p_g - p_n$. Si alors on fait la transformation habituelle, en utilisant un système à trois paramètres faisant partie de S, on aura réalisé la condition supposée.

Pour éviter toute confusion, nous poserons dans la suite $\omega_{m-3} = \delta$. Les p intégrales de première espèce de la courbe entre x et z

$$f = 0$$

sont alors susceptibles d'être représentées par

$$(11) \qquad \int \frac{Q_i(x, y, z)\,dx}{f'_z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-\delta),$$

$$(12) \qquad \int \frac{P_k(x, y, z)\,dx}{f'_z} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \delta):$$

les Q représentent des polynomes adjoints d'ordre $m-3$; les P représentent des polynomes correspondant à des adjointes particulières d'ordre $m-2$, qui sont seulement de degré $m-3$ en x et z, et de degré $m-2$ en x, y et z.

Nous désignerons d'une manière générale une intégrale de première espèce par

$$I_h = \int \frac{Q_h(x, y, z)\,dx}{f'_z}:$$



les intégrales (12) correspondront à $h = p - \delta + 1, \ldots, p$; les intégrales (11) à $h = 1, 2, \ldots, p - \delta$.

9. Comme précédemment, nous représentons par

$$\omega_1^h, \quad \omega_2^h, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}^h \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

les périodes de I_h. On peut supposer que les périodes correspondant aux indices inférieurs $1, 2, \ldots, 2p$, sont, pour les indices 1 et 2, 3 et 4, ..., $2p-1$ et $2p$, relatives aux p rétrosections (C, D) et (C′, D′) du n° 6.

Ceci posé, supposons que le coefficient de dx dans une intégrale de différentielle totale de première espèce soit

$$\frac{a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \ldots + a_p Q_p}{f'_z},$$

les a ne dépendant que de y. On aura nécessairement les $2p$ équations auxquelles devront satisfaire $a_1, \ldots, a_p$

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 \omega_1^1 \;\; + a_2 \omega_1^2 \;\; + \ldots + a_p \omega_1^p \;\; = P_1, \\ a_1 \omega_2^1 \;\; + a_2 \omega_2^2 \;\; + \ldots + a_p \omega_2^p \;\; = P_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1 \omega_r^1 \;\; + a_2 \omega_r^2 \;\; + \ldots + a_p \omega_r^p \;\; = P_r, \\ a_1 \omega_{r+1}^1 + a_2 \omega_{r+1}^2 + \ldots + a_p \omega_{r+1}^p = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0_3 \\ a_1 \omega_{2p}^1 + a_2 \omega_{2p}^2 + \ldots + a_p \omega_{2p}^p = 0. \end{array} \right.$$

$P_1, P_2, \ldots, P_r$ sont des constantes qui représentent les périodes de l'intégrale de différentielle totale pour les rétrosections

$$(C_i, D_i) \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{r}{2}\right);$$

d'après nos notations, P_1 correspond à C_1 et P_2 à D_1, puis P_3 à C_2 et P_4 à D_2, et ainsi de suite. Les périodes de l'intégrale relatives aux (C′, D′) sont nécessairement nulles.

Remarquons encore que les

$$\omega_i^h \qquad (i \leqq r)$$

sont des constantes (puisque ce sont des polynomes de degré zéro

au plus). De plus, pour

$$h = 1, 2, \ldots, p - \delta,$$

ces constantes seront nulles (car le degré du polynome serait -1).

Des équations (13), il résulte que l'on a

$$(14) \qquad P_1 \omega_2^h - P_2 \omega_1^h + P_3 \omega_4^h - P_4 \omega_3^h + \ldots + P_{r-1} \omega_r^h - P_r \omega_{r-1}^h = 0;$$

c'est une conséquence de la relation entre les périodes de deux intégrales de première espèce. Les équations (14), où les coefficients des P sont des constantes, sont seulement en nombre δ, puisque les équations sont des identités pour $h = 1, 2, \ldots, p - \delta$, d'après ce que nous venons de dire.

10. Nous allons établir réciproquement que, si l'on a r constantes $P_1, P_2, \ldots, P_r$ satisfaisant aux δ relations (14), les $2p$ équations (13) en $a_1, a_2, \ldots, a_p$ seront compatibles, et qu'il en résultera une intégrale de différentielle totale de *première espèce*, dont les périodes seront précisément $P_1, P_2, \ldots, P_r$.

Tout d'abord, on voit immédiatement que les équations (13) sont seulement en nombre p, *quand les conditions* (14) *sont vérifiées*. Il suffit, pour s'en assurer, de multiplier respectivement les équations par

$$\omega_2^h, \quad -\omega_1^h, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}^h, \quad -\omega_{2p-1}^h$$

(h étant compris entre *un* et p) et de faire la somme; on a une combinaison identiquement nulle.

Les équations (13) reviennent donc à p d'entre elles, convenablement choisies, par exemple à celles qui correspondent aux cycles C et C′, et qui, par suite, correspondront aux équations prises de deux en deux,

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 \omega_1^2 + a_2 \omega_1^2 + \ldots + a_p \omega_1^p = P_1, \\ a_1 \omega_3^1 + a_2 \omega_3^2 + \ldots + a_p \omega_3^p = P_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1 \omega_{r-1}^1 + a_2 \omega_{r-1}^2 + \ldots + a_p \omega_{r-1}^p = P_{r-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ a_1 \omega_{2p-1}^1 + a_2 \omega_{2p-1}^2 + \ldots + a_p \omega_{2p-1}^p = 0. \end{array} \right.$$



On sait que le déterminant d'ordre p formé avec les ω^h_{2k+1} n'est pas identiquement nul.

Il est clair que les équations (13) et, par suite, les équations (15) donnent pour les a des fonctions uniformes (et, par suite, rationnelles) de y; en effet, les r premières équations (13) restent invariables, quand y partant d'un point y revient, puisque les ω qui y figurent sont des constantes, et les $2p-r$ autres sont seulement remplacées par des combinaisons linéaires d'elles-mêmes.

Cherchons maintenant quelle est la nature des fonctions rationnelles a de y, satisfaisant aux équations (15). Nous aurons à distinguer, relativement à h, suivant que h appartient à la suite

$$(\alpha) \qquad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad p-\delta$$

ou à la suite

$$(\beta) \qquad p-\delta+1,\quad \ldots,\quad p.$$

Si h est dans la suite (α) on a pour y très grand

$$\omega^h_k = \frac{\alpha^h_k}{y} + \frac{\beta^h_k}{y^2} + \ldots,$$

et α^h_k est manifestement égale à une période de l'intégrale

$$\int \frac{q_h(x,\ 1,\ z)\,dx}{\varphi'_z}$$

relative à la courbe $\varphi(x,\ 1,\ z)=0$, en désignant par $q_h(x, y, z)$ et $\varphi(x, y, z)$ les termes homogènes de plus haut degré (respectivement $m-3$ et m) dans $Q_h(x, y, z)$ et dans $f(x, y, z)$.

Si h est dans la suite (β), on aura

$$\omega^h_k = \alpha^h_k + \frac{\beta^h_k}{y} + \ldots$$

et α^h_k a la même signification que plus haut, sauf que $q_h(x, y, z)$ est un polynome homogène de degré $m-2$.

De cette signification des α^h_k, il résulte que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^2_1 & \ldots & \alpha^p_1 \\ \alpha^1_3 & \alpha^2_3 & \ldots & \alpha^p_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^1_{2p-1} & \alpha^2_{2p-1} & \ldots & \alpha^p_{2p-1} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul d'après une proposition classique dans la théorie des intégrales abéliennes de première espèce; car ce déterminant représente le déterminant des périodes pour les cycles C et C' des intégrales

$$\int \frac{y\,Q_h(x, y, z)\,dx}{f'_z} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p-\delta),$$

$$\int \frac{Q_h(x, y, z)\,dx}{f'_z} \qquad (h = p-\delta+1, \ldots, p),$$

quand on y fait $y = \infty$, ce qui donne alors (avec le changement de variables fait plus haut) des intégrales relatives à la courbe $\varphi(x, 1, z) = 0$.

Il résulte de là que le développement des a suivant les puissances descendantes de y commence par un terme, qui est au plus du premier degré en y pour

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{p-\delta},$$

et qui est une constante pour les autres fonctions a.

11. Nous allons montrer maintenant que $a_1, a_2, \ldots, a_{p-\delta}$ sont des polynomes du premier degré en y, et que les autres a sont des constantes. Il suffira de voir qu'ils ne sont infinis pour aucune valeur finie de y. Or le déterminant

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \ldots & \omega_1^p \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \ldots & \omega_3^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{2p-1}^1 & \omega_{2p-1}^2 & \ldots & \omega_{2p-1}^p \end{vmatrix}$$

reste évidemment fini et *différent de zéro*, quand y n'est pas en un point singulier b de l'équation E. Les seules valeurs à examiner sont donc les valeurs b.

Donnons à y une valeur voisine de b. On peut supposer que les cycles donnant les périodes marquées par les indices $1, 3, \ldots, 2p-1$ sont formés, le premier par un petit contour γ enveloppant les *deux* points singuliers de la courbe $f(x, y, z) = 0$ voisins de b, et les autres de $p-1$ contours ne passant pas dans le voisinage de b, et qui deviendront, quand y sera égal à b, $p-1$ cycles de la courbe de genre $p-1$

$$f(x, b, z) = 0,$$



appartenant respectivement aux rétrosections d'une division canonique de Riemann.

Les adjointes Q_h de la surface f ici considérées dépendent de p paramètres; on peut donc supposer que $p-1$ d'entre elles

$$Q_1, \quad Q_2, \quad \ldots, \quad Q_{p-1}$$

passent par le point de la surface où le plan tangent est donné par

$$y = b,$$

la dernière Q_p ne passant pas par ce point.

Que deviennent dans le déterminant (16) les différents termes pour $y = b$? Dans la première ligne, on aura

$$\omega_1^1 = \omega_1^2 = \ldots = \omega_1^{p-1} = 0, \qquad \omega_1^p \neq 0 \qquad (\text{pour } y = b).$$

D'autre part, le déterminant d'ordre $p-1$

$$\begin{vmatrix} \omega_3^1 & \omega_3^2 & \ldots & \omega_3^{p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \omega_{2p-1}^1 & \omega_{2p-1}^2 & \ldots & \omega_{2p-1}^{p-1} \end{vmatrix} \qquad (\text{pour } y = b)$$

n'est pas nul, puisque c'est le déterminant de $p-1$ périodes appartenant chacune à une rétrosection du type canonique pour la courbe $f(x, b, z) = 0$ de genre $p-1$.

Il résulte de là que le déterminant (16) est différent de zéro pour $y = b$. Les fonctions rationnelles a sont donc finies pour toute valeur finie de y, et l'on aura donc, d'après ce qui a été dit au numéro précédent,

$$\begin{aligned} a_i &= \alpha_i y + \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p - \delta), \\ a_{i'} &= \alpha_{i'} \qquad\qquad (i' = p - \delta + 1, \ldots, p), \end{aligned}$$

les α et les β étant des constantes.

12. Le théorème énoncé est maintenant immédiat, car l'expression

$$\frac{a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \ldots + a_p Q_p}{f'_z}$$

est le coefficient de dx dans une intégrale de différentielle totale de seconde espèce, et, d'après la forme des a, *cette intégrale de*

seconde espèce est de première espèce. Nous pouvons donc dire que :

Le nombre des intégrales simples distinctes de première espèce d'une surface algébrique est égal au nombre des constantes P *pouvant être prises arbitrairement dans les* δ *équations*

$$P_1\omega_2^h - P_2\omega_1^h + P_3\omega_4^h - P_4\omega_3^h + \ldots + P_{r-1}\omega_r^h - P_r\omega_{r-1}^h = 0$$

(h *prenant les valeurs* $p-\delta+1, \ldots, p$). Dans ces équations les ω sont des constantes.

13. Si les premiers membres des équations précédentes regardés comme des polynomes en P sont *indépendants,* on pourra prendre arbitrairement

$$r-\delta$$

des P, et alors le nombre r_0 des intégrales de première espèce sera précisément $r-\delta$. *On aura donc*

$$r_0 = r-\delta;$$

mais ce raisonnement rend seulement ce résultat vraisemblable. Si les polynomes en P se réduisaient à un moindre nombre, il y aurait plus de $r-\delta$ lettres P arbitraires. *Nous pouvons donc seulement en toute rigueur conclure à l'inégalité*

$$r_0 \geqq r-\delta.$$

Qu'arriverait-il, si les équations du numéro précédent n'étaient pas indépendantes ? Il est visible qu'il y aurait une intégrale abélienne de la forme

$$\sum_{h=p-\delta+1}^{h=p} \lambda_h I_h$$

(les λ étant des constantes non toutes nulles) dont les r périodes relatives aux rétrosections (C, D) seraient nulles.

Ainsi, il y aurait une intégrale de première espèce du second type [le type (12)] *dont les* r *premières périodes seraient nulles,* comme il arrive à toutes les intégrales du type (11). Dans la note citée au n° 3, M. Picard, pensant avoir démontré que cette



circonstance est impossible, énonce que l'on a

$$r_0 = r - \delta. \tag{17}$$

Mais, cette démonstration ayant besoin d'être complétée, nous ne nous y arrêterons pas. D'ailleurs, l'égalité (17) a été établie, en se plaçant à un tout autre point de vue, par M. Severi dans un très intéressant Mémoire auquel nous renverrons (¹).

14. Nous énoncerons encore un théorème extrêmement remarquable dû à M. Castelnuovo relatif aux nombres des intégrales de différentielles totales de première et de seconde espèce (²). *Ce théorème consiste en ce que l'on a l'égalité*

$$r = 2\delta, \tag{18}$$

d'où résulte en outre, en vertu de la relation (17),

$$r_0 = \delta.$$

Nous ne donnerons pas la démonstration de M. Castelnuovo; elle s'appuie sur un théorème fondamental de M. Enriques, qui n'a pas été établi dans cet Ouvrage et dont l'étude nous entraînerait trop loin (³). En utilisant aussi ce théorème, M. Severi (⁴) a donné une autre démonstration de la relation (18).

Que faudrait-il faire pour établir le théorème de M. Castelnuovo, en se servant de la proposition que nous avons démontrée au nº 12. Pour le voir, cherchons d'abord quelles conséquences résulteront du théorème de M. Castelnuovo, pour le Tableau des périodes des intégrales (11) et (12) de la page 425, qui forment les p intégrales de première espèce de la courbe entre x et z.

(¹) F. Severi, *Sulla differenza tra i numeri degli integrali di Picard della prima et della secunda specie appartenenti ad una superficie algebrica* (*Accademia Reale delle Scienze di Torino*, 18 janvier 1905).

(²) G. Castelnuovo, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, janvier 1905, et *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, mai-juin 1905).

(³) F. Enriques, *Sulla proprieta caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (*Atti della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, 11 déc. 1904).

(⁴) F. Severi, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (*Annali di Matematica*, 3ᵉ série, t. XII).

Pour les $p - \delta$ intégrales du type (11), on a un Tableau des périodes que l'on peut écrire

$$(\pi_1) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & K_1^1 & \dots & K_{2p-r}^1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & K_1^2 & \dots & K_{2p-r}^2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & K_1^{p-\frac{r}{2}} & \dots & K_{2p-r}^{p-\frac{r}{2}} \end{vmatrix}$$

les r premières colonnes correspondant aux cycles (C, D).

Quant aux $\frac{r}{2}$ intégrales (12), on peut évidemment supposer qu'elles correspondent aux $\frac{r}{2}$ intégrales de différentielles totales de première espèce, nous voulons dire qu'elles représentent ces intégrales quand on y fait $dy = 0$. Dans ces conditions, les périodes des intégrales (12) relatives aux cycles (C′, D′) sont nulles, et l'on a alors pour ces intégrales le Tableau

$$(\pi_2) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots & 0 \\ a_{\frac{r}{2},1} & a_{\frac{r}{2},2} & \dots & a_{\frac{r}{2},r} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

où les a sont des constantes.

Si, maintenant, prenant deux intégrales quelconques parmi les p intégrales de première espèce (11) et (12), on forme la relation bilinéaire entre les périodes de ces intégrales, on aura une relation qui sera identiquement vérifiée si l'on prend une intégrale du Tableau (π_1) et une intégrale du Tableau (π_2); cette relation ne contiendra que les périodes relatives aux cycles (C′, D′) si l'on envisage deux intégrales du Tableau (π_1), et enfin elle ne contiendra que les périodes relatives aux cycles (C, D) si l'on prend deux intégrales du Tableau (π_2).

De là nous concluons, toujours en admettant le théorème de M. Castelnuovo, que, si l'on prend deux intégrales abéliennes *quelconques* de première espèce

$$\int \frac{R(x, y, z)\,dx}{f'_z}$$

et

$$\int \frac{R'(x, y, z)\,dx}{f'_z}$$

de la courbe entre x et z

$$f(x, y, z) = 0,$$

où R et R' sont des polynomes en x, y et z, *on a entre les solutions*

$$\omega_{r+1}, \quad \ldots, \quad \omega_{2p} \quad \text{et} \quad \omega'_{r+1}, \quad \ldots, \quad \omega'_{2p},$$

des équations E_0 *et* E'_0 *relatives à ces deux intégrales* (en revenant aux notations des nos 9 et suivants) *la relation bilinéaire*

$$(19) \qquad \omega_{r+1}\omega'_{r+2} - \omega_{r+2}\omega'_{r+1} + \ldots + \omega_{2p-1}\omega'_{2p} - \omega_{2p}\omega'_{2p-1} = 0.$$

Nous savons, d'après ce qui a été établi dans la Section II de ce Chapitre, que le groupe de l'équation E_0 laisse invariable le premier membre de (19) quand on effectue simultanément sur les ω et les ω' les substitutions de ce groupe, mais nous n'avons pas réussi à démontrer directement que ce premier membre est nul (1); il nous semble toutefois très probable qu'on pourra un jour y parvenir.

Quoi qu'il en soit, *si l'on admet ce fait,* nous allons voir que l'on peut démontrer facilement, en se servant des théorèmes établis dans les paragraphes précédents, que le nombre des intégrales de différentielles totales de première espèce est égal à $\frac{r}{2}$.

15. Tout d'abord, on aura évidemment

$$(20) \qquad \omega_1\omega'_2 - \omega_2\omega'_1 + \ldots + \omega_{r-1}\omega'_r - \omega_r\omega'_{r-1} = 0,$$

puisque la somme des premiers membres des égalités (19) et (20) est nulle.

Il s'agit de savoir combien nous pourrons prendre de constantes P arbitraires dans les équations (13) du no 9, pour que ces $2p$ équations aux p inconnues $a_1, a_2, \ldots, a_p$ soient compatibles.

Considérons les équations (15) du no 10, en donnant à

$$P_1, \quad P_3, \quad \ldots, \quad P_{r-1}$$

(1) M. Picard pensait avoir obtenu une telle démonstration à l'aide de considérations délicates empruntées à l'*Analysis situs* dans l'espace à quatre dimensions, mais cette démonstration nous semble maintenant sujette à des objections, et nous nous contentons d'appeler l'attention sur la lacune qui reste à combler.



des valeurs arbitraires; nous déterminons ainsi $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Nous allons voir que les valeurs des autres périodes, pour l'intégrale correspondant à ces valeurs des a, sont des constantes déterminées $P_2, \ldots, P_r$ pour les cycles D, et sont nulles pour les cycles D', de telle sorte que l'on a des équations de la forme (13).

Désignons par $P_2, \ldots, P_r$ les périodes relatives aux cycles D de l'intégrale de première espèce formée avec les a. Soient aussi $P_{r+2}, P_{r+4}, \ldots, P_{2p}$ les périodes de la même intégrale relative aux cycles D'. Il faut démontrer que $P_2, P_4, \ldots, P_r$ sont des constantes et que $P_{r+2}, \ldots, P_{2p}$ sont nuls.

C'est ce que vont nous donner les relations (19) et (20). Nous pouvons écrire les équations

$$\begin{aligned} a_1\omega_1^1 + a_2\omega_1^2 + \ldots + a_p\omega_1^p &= P_1, \\ a_1\omega_2^1 + a_2\omega_2^2 + \ldots + a_p\omega_2^p &= P_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ a_1\omega_r^1 + a_2\omega_r^2 + \ldots + a_p\omega_r^p &= P_r. \end{aligned}$$

On en déduit, d'après les relations (20),

$$(21) \qquad P_1\omega_2^h - P_2\omega_1^h + P_3\omega_4^h - P_4\omega_3^h + \ldots + P_{r-1}\omega_r^h - P_r\omega_{r-1}^h = 0,$$

h étant un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, p$; tous les ω figurant dans ces relations sont d'ailleurs des constantes (c'est-à-dire indépendantes de y). Or tous les déterminants formés, en prenant $\frac{r}{2}$ lignes dans le Tableau

$$\omega_1^h, \quad \omega_3^h, \quad \ldots, \quad \omega_{r-1}^h \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

ne sont pas nuls, car alors le déterminant d'ordre p formé avec les périodes relatives aux cycles C et C' serait nul, ce qui n'a pas lieu d'après un théorème classique. Les équations (21) déterminent alors certainement

$$P_2, \quad P_4, \quad \ldots, \quad P_r$$

en fonction des arbitraires

$$P_1, \quad P_3, \quad \ldots, \quad P_{r-1},$$

et il ne s'introduit que des constantes dans ces expressions. Nous avons donc le résultat voulu.



Considérons de même les équations

$$\begin{aligned}
a_1\omega^1_{r+1} + a_2\omega^2_{r+1} + \ldots + a_p\omega^p_{r+1} &= 0,\\
a_1\omega^1_{r+2} + a_2\omega^2_{r+2} + \ldots + a_p\omega^p_{r+2} &= P_{r+2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots,\\
a_1\omega^1_{2p-1} + a_2\omega^2_{2p-1} + \ldots + a_p\omega^p_{2p-1} &= 0,\\
a_1\omega^1_{2p} + a_2\omega^2_{2p} + \ldots + a_p\omega^p_{2p} &= P_{2p},
\end{aligned}$$

où les seconds membres sont alternativement *zéro* et une lettre P à indice pair. Nous aurons, d'après les relations (19),

$$(22)\qquad P_{r+2}\,\omega^h_{r+1} + P_{r+4}\,\omega^h_{r+3} + \ldots + P_{2p}\,\omega^h_{2p-1} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, p).$$

Or tous les déterminants formés en prenant $p - \frac{r}{2}$ lignes dans le Tableau

$$\omega^h_{r+1}, \quad \omega^h_{r+3}, \quad \ldots, \quad \omega^h_{2p-1} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

ne sont pas nuls, car alors le déterminant d'ordre p formé avec les périodes relatives aux cycles C et C′ serait nul. Des équations (22) on conclut donc que

$$P_{r+2} = P_{r+4} = \ldots = P_{2p} = 0.$$

Donc, dans les $2p$ équations (13) du n° 9, on peut prendre arbitrairement

$$P_1, \quad P_3, \quad \ldots, \quad P_{r-1},$$

et, en choisissant convenablement P_2, P_4, $\ldots$, P_r au moyen des équations (21) nécessairement compatibles, il est possible de tirer des équations (13) les a de manière à avoir une intégrale de première espèce. Il se trouve ainsi établi, sous le bénéfice des relations admises (19 ou 20), que *le nombre des intégrales de différentielles totales de première espèce est* $\frac{r}{2}$.

IV.

Sur une propriété des adjointes d'une surface algébrique.

16. Nous terminerons ce Chapitre en démontrant une propriété intéressante des adjointes d'une surface algébrique ([1]).

Revenons à cet effet à la première section de ce Chapitre. Nous n'y avons fait aucune hypothèse sur les adjointes au point de vue de leur section par un plan quelconque. Nous avons, dans le Chapitre IV de ce volume, considéré, avec M. Enriques, les adjointes de différents ordres $h\,(h \geqq m-3)$. L'ensemble des adjointes d'ordre h forme un système linéaire de surfaces. Celui-ci découpe sur un plan pris arbitrairement un système linéaire de courbes planes qui font évidemment partie des adjointes d'ordre h de la section plane correspondante de la surface. Mais il se peut que ce système linéaire de courbes planes ne forme pas l'ensemble de ces adjointes, et qu'il y ait un *défaut,* qui a été désigné par ω_h. Nous avons vu que, à partir d'une certaine valeur de h, tous les ω sont nuls. En supposant que de $h = m-3$ à $h = l-1$ les ω soient différents de zéro, nous avons établi la formule de M. Enriques (p. 88)

$$p_g - p_n = \sum_{m-3}^{l-1} \omega_h. \tag{23}$$

Or nous avons démontré, dans la Section I de ce Chapitre, l'inégalité

$$r \leqq 2\omega_{m-3}.$$

Or, d'après (23),

$$p_g - p_n \geqq \omega_{m-3},$$

puisque les ω sont positifs. Rapprochons les deux inégalités précédentes, en écrivant

$$r \leqq 2\omega_{m-3} \leqq 2(p_g - p_n)$$

([1]) E. Picard, *Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (*Journal de Crelle,* Band 129, 1905).



Mais, d'après le théorème de M. Castelnuovo,

$$r = 2(p_g - p_n).$$

Il faut donc que les deux inégalités soient des égalités, et l'on a, par suite,

$$p_g - p_n = \omega_{m-3}.$$

Donc on a, pour toutes les adjointes d'ordre h ($h \geqq m - 2$),

$$\omega_h = 0.$$

C'est là le théorème que nous voulions établir.

Ainsi, dans le calcul du genre d'une surface algébrique, il n'y a que le défaut ω_{m-3} à envisager. Nous pouvons encore énoncer le théorème sous la forme :

Les adjointes d'une surface d'ordre m, qui sont d'ordre supérieur ou égal à $m - 2$, donnent sur un plan arbitraire le système complet des adjointes du même ordre de la section plane.

Ce résultat complète les belles recherches de M. Enriques sur les adjointes d'une surface algébrique. Nous l'avons obtenu par une voie détournée ; on pourra sans doute le démontrer directement en restant à un point de vue purement géométrique.

CHAPITRE XIV.

SUR LES SURFACES HYPERELLIPTIQUES.

I.

Quelques propriétés des surfaces hyperelliptiques générales.

1. Nous ne nous proposons pas de faire dans ce Chapitre une étude approfondie des surfaces hyperelliptiques; notre but est seulement d'appliquer à ces surfaces quelques-uns des résultats généraux donnés dans cet Ouvrage.

On appelle *surfaces hyperelliptiques* les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres. L'étude de ces surfaces a été commencée par M. Picard ([1]), qui a établi leurs propriétés les plus simples. Une étude très approfondie en a été faite par M. Humbert dans son beau Mémoire *Sur la théorie générale des surfaces hyperelliptiques* ([2]).

2. On sait qu'entre trois fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux variables u et v, ayant partout à distance finie le caractère d'une fonction rationnelle, il existe une relation algébrique. Deux cas peuvent se présenter; il peut arriver qu'à un point *arbitraire* de la surface ne corresponde qu'un *seul* système

([1]) E. Picard, *Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce* (*Journal de Mathématiques,* t. I, 4e sér., 1885); *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques,* t. V, 4e sér., 1889).

([2]) G. Humbert, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (*Journal de Mathématiques,* t. IX, 4e sér., 1893).



de valeurs de u et v, abstraction faite de multiples des périodes, ou bien il y aura *plusieurs* systèmes de valeurs de u et v dans un prismatoïde de périodes.

Plaçons-nous dans la première hypothèse. Soit

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

une surface hyperelliptique jouissant de la propriété indiquée ; on établit alors que toute fonction quadruplement périodique de u et v et ayant partout à distance finie le caractère d'une fonction rationnelle est une fonction rationnelle de x, y et z.

3. Il est facile de montrer que la surface *possède deux intégrales de différentielles totales de première espèce*. Soient

$$x = F(u, v), \qquad y = F_1(u, v), \qquad z = F_2(u, v)$$

les trois équations donnant la représentation paramétrique de la surface.

Nous avons

$$dx = \frac{\partial F}{\partial u}\, du + \frac{\partial F}{\partial v}\, dv,$$

$$dy = \frac{\partial F_1}{\partial u}\, du + \frac{\partial F_1}{\partial v}\, dv.$$

Or les coefficients de du et dv sont des fonctions quadruplement périodiques de u et v ; elles peuvent donc s'exprimer par des fonctions rationnelles de x, y et z. En résolvant les deux équations précédentes par rapport à du et dv, on aura donc

$$du = P\, dx + Q\, dy,$$
$$dv = P_1 dx + Q_1 dy,$$

les P et Q étant des fonctions rationnelles de x, y et z. Les deux intégrales

$$\int P\, dx + Q\, dy \quad \text{et} \quad \int P_1\, dx + Q_1\, dy$$

sont évidemment des intégrales de différentielles totales relatives à la surface f, et *elles sont de première espèce,* puisque à tout point (x, y, z) doivent nécessairement correspondre des valeurs finies de u et v. Ces deux intégrales sont distinctes et linéairement indépendantes.

En second lieu, toute intégrale de première espèce de la surface est nécessairement une combinaison linéaire à coefficients constants des deux précédentes.

En effet, soit une intégrale de première espèce

$$\int P_2\,dx + Q_2\,dy;$$

en remplaçant x, y, z par leurs valeurs en u et v, cette intégrale devient

$$\int \varphi\,du + \psi\,dv,$$

φ et ψ étant des fonctions quadruplement périodiques de u et v. Puisque l'intégrale reste toujours finie, il faut que les fonctions uniformes φ et ψ restent toujours finies; elles doivent donc se réduire à des constantes, et notre intégrale se réduit

$$\int \alpha\,du + \beta\,dv,$$

α et β étant des constantes. Elle est donc une combinaison linéaire des deux premières.

4. On montre aisément que *le genre géométrique* de la surface est égal à *un*, c'est-à-dire qu'*il y a une seule intégrale double de première espèce*. Soit une telle intégrale double

$$\iint R(x, y, z)\,dx\,dy. \tag{2}$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en u et v, l'intégrale devient

$$\iint \chi(u, v)\,du\,dv,$$

χ étant une fonction uniforme quadruplement périodique de u et v. Si χ ne se réduit pas à une constante, il est manifeste que, dans un prismatoïde de périodes, on pourra choisir un *continuum* d'intégration pour l'intégrale double, tel que celle-ci soit infinie. Il faut donc et il suffit d'ailleurs que χ se réduise à une constante. L'intégrale double

$$\iint du\,dv,$$

qui est bien de la forme (2), quand on revient à x, y et z, est l'intégrale double de première espèce de la surface f. Elle est, comme nous savons, de la forme

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

Q étant une adjointe d'ordre $m-4$, nécessairement unique, de la surface f supposée d'ordre m.

5. Nous avons considéré (t. I, p. 136) une surface ayant plusieurs intégrales de première espèce qui ne soient pas fonctions l'une de l'autre. Soient deux telles intégrales

$$(3) \qquad u = \int_{(a, b, c)}^{(x, y, z)} \frac{B\, dx - A\, dy}{f'_z} \quad \text{et} \quad v = \int_{(a, b, c)}^{(x, y, z)} \frac{B_1\, dx - A_1\, dy}{f'_z}.$$

Il a été établi (*loc. cit.*) que l'on avait sur la surface l'identité

$$AB_1 - A_1 B = f'_z . Q(x, y, z),$$

$Q(x, y, z)$ étant un polynome adjoint d'ordre $m-4$. Ici le polynome Q correspondra à l'unique adjointe d'ordre $m-4$ de la surface f. Cette adjointe coupera la surface suivant la ligne double et suivant une ou plusieurs courbes simples que nous appellerons *les courbes* Γ.

Pour la surface que nous étudions, les équations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{B\, dx - A\, dy}{f'_z} &= du, \\ \frac{B_1\, dx - A_1\, dy}{f'_z} &= dv \end{aligned} \right.$$

donnent nécessairement pour x et y (et z) des fonctions uniformes de u et v. On voit de suite que c'est seulement quand le point (x, y, z) s'approche d'un point d'une courbe Γ, que x, y et z pourraient cesser d'être des fonctions uniformes de u et v. Soit M un point d'ailleurs quelconque (x_0, y_0, z_0) d'une telle courbe ; d'après les équations (4), on voit que le rapport $\frac{du}{dv}$ est indépendant de $\frac{dy}{dx}$, quand (x, y, z) s'approche de M.

Donc les valeurs u_0, v_0 des intégrales u et v correspondant au point M ne donnent pas pour les fonctions x et y un point ordi-

naire; ceci n'est pas douteux, puique x et y ne pourront tendre vers x_0 et y_0 que si la limite du rapport $\frac{u-u_0}{v-v_0}$ a une valeur déterminée.

Par suite, les équations précédentes étant satisfaites par des fonctions quadruplement périodiques de u et v, le point (u_0, v_0) sera pour ces fonctions un point d'indétermination. Mais, quand M se déplacera sur la courbe Γ, le système des valeurs (u_0, v_0) ne pourra pas varier d'une manière continue; car une fonction uniforme de deux variables indépendantes, qui présente, pour tout système de valeurs finies des variables, le caractère d'une fonction rationnelle, ne peut pas avoir une suite de points d'indétermination se suivant d'une manière continue. Par conséquent, u et v gardent une valeur constante, quand (x_0, y_0, z_0) se déplace sur une courbe Γ.

Il résulte de là que *toute courbe* Γ *est une courbe unicursale*. C'est une de ces lignes de la surface que, dans un Chapitre précédent, nous avons appelée *une courbe exceptionnelle*.

6. M. Humbert, dans le Mémoire cité plus haut, a fait une étude approfondie des courbes algébriques tracées sur les surfaces hyperelliptiques. Il représente d'abord ces surfaces en coordonnées homogènes par des équations de la forme

$$x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les Θ_i étant des fonctions *thêta* normales de même ordre, de caractéristique nulle.

En supposant que les fonctions abéliennes ne sont pas singulières (c'est-à-dire qu'il n'y a pas entre certaines combinaisons de leurs périodes une relation homogène et linéaire à coefficients entiers), il établit que toute courbe algébrique tracée sur la surface est représentée par une équation de la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu) = 0,$$

λ et μ étant des constantes, et Θ une fonction thêta normale de caractéristique nulle.

Nous renverrons à son Mémoire pour la démonstration de cet important théorème.

7. Nous avons vu plus haut que le genre géométrique p_g de la



surface est égal à *un*. En s'appuyant sur le théorème de M. Castelnuovo (t. II, p. 432) nous avons ici

$$p_g - p_n = 2,$$

puisqu'il y a deux intégrales de première espèce. On en déduit

$$p_n = -1.$$

Ce résultat a été antérieurement établi par M. Humbert au moyen d'un calcul direct (*Journal de Math.*, 1893, p. 429).

Ajoutons encore que la surface possède *quatre* intégrales distinctes de différentielles totales de seconde espèce, puisque le nombre des cycles linéaires est évidemment égal à *quatre* et que par suite r est égal à ce nombre.

On peut enfin se demander quel est le moindre degré d'une surface hyperelliptique du type qui vient de nous occuper. M. Picard a démontré qu'une surface de genre géométrique égal à *un* ne peut avoir deux intégrales de différentielles totales de première espèce qui ne soient pas fonctions l'une de l'autre, si son degré n'atteint pas *six* (*Journal de Math.*, 1885; *voir* aussi t. I, p. 141), mais il s'est borné aux singularités que nous avons appelées *ordinaires* dans tout cet Ouvrage. Le théorème complet a été établi par M. A. Berry, et l'on trouvera dans les additions placées au commencement de ce Volume les renseignements bibliographiques à ce sujet. Ce résultat admis, il est clair qu'*il ne peut exister de surface hyperelliptique de degré égal ou inférieur à cinq telle qu'à un point arbitraire de la surface ne corresponde qu'un seul système de valeurs des paramètres aux périodes près.*

On peut indiquer une surface du *sixième* degré rentrant au contraire dans ce type. Prenons en effet la surface

$$z = \sqrt{f(x)} + \sqrt{\varphi(y)},$$

f et φ étant des polynomes arbitraires du troisième degré. En désignant par $P(u)$ et $Q(v)$ les fonctions elliptiques correspondant à

$$\left(\frac{dP}{du}\right)^2 = f(P),$$

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right)^2 = \varphi(Q),$$

on aura évidemment

$$x = P(u),$$
$$y = Q(v),$$
$$z = P'(u) + Q'(v),$$

et la surface rentre bien dans le type voulu.

Ici les fonctions abéliennes sont très spéciales, puisqu'elles se ramènent aux fonctions doublement périodiques pour chacun des paramètres. Relativement aux fonctions abéliennes générales, M. Humbert a indiqué une surface hyperelliptique du *huitième* degré (*Journal de Math.*, 1893, p. 436). On ne sait s'il en existe pour les sixième et septième degrés.

II.

Sur les valeurs des nombres ρ et ρ_0 pour une surface hyperelliptique non singulière.

8. Nous allons calculer les valeurs des nombres ρ et ρ_0 pour une surface hyperelliptique non singulière, en désignant par ρ le nombre correspondant au théorème fondamental dans la théorie des intégrales de différentielles totales de troisième espèce (p. 241), et par ρ_0 le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce (p. 289).

Soit, comme plus haut, la surface f donnée en coordonnées homogènes par les équations

$$x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les Θ étant des fonctions thêta normales du même ordre et de caractéristique nulle. Nous nous plaçons dans l'hypothèse où les quatre Θ ne s'annulent pas simultanément pour un même système de valeurs de u et v, c'est-à-dire que la surface est représentable point par point, sans exception, sur le champ hyperelliptique; il n'y a pas alors dans cette correspondance de courbe exceptionnelle sur la surface.

Envisageons sur la surface une courbe algébrique irréductible. D'après ce que nous avons rappelé, elle sera représentée par une équation de la forme

$$\Theta(u - \lambda, v - \mu) = 0,$$



λ et μ étant deux constantes, et Θ une fonction thêta normale de caractéristique nulle, dont nous désignerons l'ordre par m.

Ceci posé, soit $\theta(u, v)$ la fonction thêta normale, de caractéristique nulle, et d'ordre *un*; la fonction

$$\theta^m(u, v)$$

sera d'ordre m, et, par suite, le quotient

$$\frac{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}{\theta^m(u-\lambda, v-\mu)}$$

sera une fonction quadruplement périodique de u et v, et, par suite, une fonction rationnelle des coordonnées non homogènes x, y et z d'un point arbitraire de la surface. Si donc nous considérons l'expression

$$\log\frac{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}{\theta^m(u-\lambda, v-\mu)},$$

ce sera une intégrale de différentielle totale de troisième espèce (réductible manifestement à un logarithme), qui aura sur la surface les deux courbes logarithmiques

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu) = 0 \quad \text{et} \quad \theta(u-\lambda, v-\mu) = 0.$$

Ceci nous permet de nous borner, pour l'étude des lignes de la surface donnée f, *en tant que courbes logarithmiques d'intégrales de troisième espèce,* aux lignes données par une équation

$$\theta(u-\lambda, v-\mu) = 0,$$

où λ et μ sont deux constantes arbitraires.

Nous allons montrer que, si l'on prend *deux* quelconques de ces lignes correspondant aux équations

$$\theta(u-\lambda_1, v-\mu_1) = 0 \quad \text{et} \quad \theta(u-\lambda_2, v-\mu_2) = 0,$$

que nous désignerons par C_1 et C_2, il y aura une intégrale de différentielle totale de troisième espèce ayant seulement ces deux lignes comme courbes logarithmiques. Supposons, en effet, que λ_2 et μ_2 soient respectivement très voisins de λ_1 et μ_1; les deux courbes C_1 et C_2 de même degré sont alors très voisines l'une de l'autre sur la surface. Par conséquent, les substitutions du type S

envisagées au n° 2 (Chap. IX, p. 233) et se rapportant respectivement à la courbe C_1 et à la courbe C_2 sont *identiques,* c'est-à-dire que l'on aura (*voir* n° 3, même Chapitre)

$$\mu^{(i)} = \nu^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Par suite, les $2pk$ relations considérées dans le n° 3 (Chapitre cité) entre les K et les c pourront être satisfaites en prenant tous les K nuls, et

$$c_1 + c_2 = 0.$$

Nous aurons alors une intégrale de troisième espèce, conformément à la théorie générale des intégrales de cette espèce, ayant les deux seules courbes logarithmiques C_1 et C_2; la ligne à l'infini de la surface f ne peut être une courbe logarithmique pour cette intégrale, puisque C_1 et C_2 sont du même degré, et que $c_1 = -c_2$. En faisant varier λ et μ par degrés assez petits, on voit que deux courbes *quelconques* du type

$$\theta(u - \lambda, v - \mu) = 0$$

sont courbes logarithmiques d'une intégrale convenable de troisième espèce. *On a par suite pour la surface hyperelliptique considérée f sans courbes exceptionnelles* (¹)

$$\rho = 1. \tag{5}$$

9. Ayant ainsi obtenu le nombre ρ correspondant à la surface f, nous allons chercher le nombre ρ_0 *des intégrales doubles distinctes de seconde espèce* relatif à cette surface. Il est donné par la formule fondamentale de la page 408

$$\rho_0 = N - 4p - (m - 1) + 2r - (\rho - 1). \tag{6}$$

La surface est définie par les équations

$$x = \frac{\Theta_2(u, v)}{\Theta_1(u, v)}, \qquad y = \frac{\Theta_3(u, v)}{\Theta_1(u, v)}, \qquad z = \frac{\Theta_4(u, v)}{\Theta_1(u, v)},$$

les quatre Θ étant des fonctions thêta normales, de caractéristique nulle, dont nous désignons maintenant par h le degré; de plus,

---

(¹) E. Picard, *Annales de l'Ecole Normale,* t. XVIII, 1901, p. 411.

ces fonctions n'ont pas de racines communes. Il faut calculer les nombres

$$N, \quad p, \quad m.$$

Nous savons que $\rho = 1$ et $r = 4$.

Or il résulte des formules du Mémoire cité de M. Humbert (*Journal de Math.*, 1893, p. 430) que l'on a

$$m = 2h^2, \qquad p = h^2 + 1.$$

Il reste à évaluer la classe N de la surface. On voit de suite que N est égal au nombre des solutions distinctes des deux équations

$$\frac{\Theta}{\theta} = \frac{\frac{\partial\Theta}{\partial u}}{\frac{\partial\theta}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial\Theta}{\partial v}}{\frac{\partial\theta}{\partial v}},$$

en désignant par Θ et θ deux fonctions thêta normales d'ordre h, de caractéristique nulle, sans zéro commun, et d'ailleurs arbitraires. En s'appuyant sur un théorème de M. Poincaré relatif aux racines communes à deux fonctions thêta, on trouve sans difficultés

$$N = 6h^2.$$

Nous pouvons maintenant appliquer la formule (6); comme il devait être, la valeur de h disparaît, et l'on trouve immédiatement

$$\rho_0 = 5.$$

Tel est le nombre *des intégrales doubles distinctes de seconde espèce* pour les surfaces hyperelliptiques *non singulières*. Si la surface hyperelliptique était singulière, c'est-à-dire si les périodes satisfaisaient à une ou plusieurs relations singulières (au sens de M. Humbert), il y aurait lieu de rechercher ce que devient le nombre ρ_0, qui peut être différent, car cet invariant, ainsi que nous l'avons déjà remarqué plusieurs fois dans ce Volume, n'est pas seulement géométrique et algébrique, *mais a aussi un caractère arithmétique*.

10. Les surfaces hyperelliptiques peuvent être rattachées aux courbes de genre *deux*. Soit une courbe de genre *deux*

$$y^2 = f(x),$$

où $f(x)$ est un polynome du cinquième degré; nous considérons les équations classiques de la théorie des fonctions abéliennes

$$\begin{aligned}\int_{(\alpha,\beta)}^{(x_1,y_1)} \frac{dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \int_{(\alpha,\beta)}^{(x_2,y_2)} \frac{dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} &= u,\\ \int_{(\alpha,\beta)}^{(x_1,y_1)} \frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \int_{(\alpha,\beta)}^{(x_2,y_2)} \frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} &= v,\end{aligned} \qquad [y_1 = \sqrt{f(x_1)},\ \ y_2 = \sqrt{f(x_2)}].$$

On sait que toute fonction rationnelle

$$R(x_1, y_1;\ x_2, y_2)$$

symétrique en (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est une fonction quadruplement périodique de u et v.

Les équations

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_1 + x_2,\\ y &= x_1 x_2,\\ z &= y_1 + y_2,\end{aligned}\right.$$

où x_1 et x_2 sont deux paramètres arbitraires, définissent une surface hyperelliptique f, et il est manifeste qu'à un point arbitraire (x, y, z) de cette surface ne correspond qu'*un couple* de points (x_1, y_1), (x_2, y_2) de la courbe $y^2 = f(x)$ et, par suite, un seul système de valeurs de u et v (aux périodes près).

11. Cherchons à former les intégrales doubles de seconde espèce de cette surface. Envisageons à cet effet les quatre intégrales abéliennes distinctes de seconde espèce de la courbe hyperelliptique

$$\int \frac{dx}{y},\quad \int \frac{x\,dx}{y},\quad \int \frac{x^2\,dx}{y},\quad \int \frac{x^3\,dx}{y} \qquad [y^2 = f(x)],$$

et formons l'intégrale double

$$(8)\qquad \iint \frac{x_1^p x_2^q - x_1^q x_2^p}{y_1 y_2}\, dx_1\, dx_2 \qquad (p, q = 0, 1, 2, 3).$$

D'après sa formation même, cette intégrale double a les caractères d'une intégrale double de seconde espèce. Exprimons-la à l'aide des variables u et v. On a

$$dx_1\, dx_2 = \frac{du\, dv}{\dfrac{D(u, v)}{D(x_1, x_2)}} = y_1 y_2 \frac{du\, dv}{x_2 - x_1}.$$

L'intégrale devient alors

$$\iint \frac{x_1^p x_2^q - x_1^q x_2^p}{x_2 - x_1}\, du\, dv.$$

Le coefficient de $du\,dv$ est une fonction rationnelle symétrique de x_1 et x_2 et, par suite, une fonction quadruplement périodique de u et v. Il en résulte que l'intégrale (8) est de la forme

$$\iint \mathrm{R}(x, y, z)\, dx\, dy, \tag{9}$$

R étant rationnelle en x, y et z, et il serait d'ailleurs facile de la calculer; c'est donc une intégrale double de seconde espèce de la surface f définie par les équations (7).

Il y a *six* combinaisons de la forme (8); nous obtenons donc ainsi *six* intégrales doubles (9) de seconde espèce de notre surface, mais nous allons montrer qu'elles ne sont pas *distinctes*.

Reportons-nous en effet à la formule fondamentale dans la théorie des fonctions abéliennes de Weierstrass, que nous avons utilisée précédemment pour un autre objet (page 198 de ce Volume), et que nous écrirons

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}&\left[\frac{f(x_1)}{(x_2 - x_1)\sqrt{f(x_1)f(x_2)}}\right]\\ &- \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{f(x_2)}{(x_1 - x_2)\sqrt{f(x_1)f(x_2)}}\right] = \frac{\mathrm{U}(x_1, x_2)}{\sqrt{f(x_1)f(x_2)}},\end{aligned}$$

U étant un polynome en x_1 et x_2, défini par cette identité même, qui est du troisième degré par rapport à x_1 et par rapport à x_2.

Elle montre qu'on peut former une combinaison linéaire à coefficients constants (non tous nuls) des expressions

$$\frac{x_1^p x_2^q - x_1^q x_2^p}{y_1 y_2} \qquad (p, q = 0, 1, 2, 3),$$

qui se réduit à une somme de dérivées partielles. On en déduit qu'il y a une combinaison linéaire des intégrales (9) qui est de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

U et V étant rationnelles en x, y et z, c'est-à-dire que les intégrales formées se réduisent à *cinq*. On vérifiera facilement que l'on

obtient ainsi *cinq* intégrales doubles *distinctes* de seconde espèce de la surface f, si le polynome $f(x)$ est arbitraire, et le théorème établi précédemment, à savoir que

$$\rho_0 = 5$$

pour une surface hyperelliptique, se trouve établi par une tout autre voie.

III.

Sur la surface de Kummer et les nombres ρ et ρ_0 qui lui correspondent.

12. Dans les deux Sections précédentes, il a été question de surfaces hyperelliptiques telles qu'à un point arbitraire de la surface ne correspond qu'un système (u, v), abstraction faite de multiples des périodes.

Il existe des surfaces dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres, et pour lesquelles correspondent à un point arbitraire de la surface *deux* systèmes distincts de valeurs u et v.

Il est facile d'en donner un exemple en reprenant les équations abéliennes du n° **10**. Envisageons, avec les mêmes notations, la surface définie par

$$x = x_1 + x_2,$$
$$y = x_1 x_2,$$
$$z = y_1 y_2.$$

A un point arbitraire (x, y, z) de cette surface correspondront un système de valeurs (x_1, x_2) et le produit $y_1 y_2$. On aura pour y_1 et y_2 deux systèmes de valeurs

$$y_1,\quad y_2 \qquad \text{et} \qquad -y_1,\quad -y_2;$$

donc, à un point arbitraire de la surface correspondent *deux* systèmes de valeurs de u et v.

13. Parmi les surfaces jouissant de la propriété précédente, la plus célèbre est la surface de Kummer, surface du quatrième degré



ayant *seize* points doubles. Il ne serait pas dans notre sujet d'en faire une étude, même superficielle; nous allons seulement calculer les nombres ρ et ρ_0 qui lui correspondent.

Le nombre ρ est facile à calculer, si nous nous reportons à une proposition extrêmement intéressante de M. Humbert relative aux courbes algébriques tracées sur une surface de Kummer (non singulière). D'après ce théorème, toutes les courbes algébriques tracées sur une surface de Kummer sont de degré pair, et, si $2n$ désigne le degré d'une telle courbe, on peut le long de cette courbe circonscrire à la surface une surface de degré n ne la coupant pas en dehors de la courbe considérée. On déduit de là immédiatement que $\rho = 1$. Car, si une courbe C_1 de degré $2n_1$ est l'intersection de la surface de Kummer avec la surface

$$f_1(x, y, z) = 0,$$

et, si une courbe C_2 de degré $2n_2$ est donnée par la surface

$$f_2(x, y, z) = 0,$$

on a une intégrale de différentielle totale de troisième espèce représentée par le logarithme

$$\log \frac{f_1^{n_2}}{f_2^{n_1}},$$

ayant comme uniques lignes logarithmiques C_1 et C_2. On déduit de là que ρ est égal à *un* pour la surface de Kummer.

14. Cherchons le nombre ρ_0 relatif à cette surface. Il nous faut appliquer ici la formule générale de la page 409

$$\rho_0 = N + d - 4p - (m-1) + 2r - (\rho - 1)$$

applicable au cas où, outre la ligne double, la surface a d points isolés.

L'application en est facile à la surface de Kummer.

On sait que

$$r = 0, \qquad \rho = 1;$$

de plus on a

$$m = 4, \qquad d = 16, \qquad N = 4, \qquad p = 3.$$

La formule donne alors

$$\rho_0 = 5.$$

Nous trouvons le même nombre que pour la surface hyperelliptique générale.

15. En suivant une marche analogue à celle du n° **11**, nous pouvons former facilement *cinq* intégrales doubles de seconde espèce relatives à la surface du n° **12** définie par les équations

$$x = x_1 + x_2,$$
$$y = x_1 x_2,$$
$$z = y_1 y_2.$$

Ces intégrales doubles ont toujours la même forme

$$\iint \frac{x_1^p x_2^q - x_1^q x_2^p}{y_1 y_2}\, dx_1\, dx_2 \qquad (p, q = 0, 1, 2, 3).$$

Cette intégrale peut s'écrire dans le cas actuel

$$\iint \frac{x_1^p x_2^q - x_1^q x_2^p}{x_1 - x_2}\, \frac{dx\, dy}{z}.$$

Il est clair que

$$\frac{x_1^p x_2^q - x_1^q x_2^p}{x_1 - x_2}$$

est un polynome $P(x, y)$, et l'on a donc une intégrale

$$\iint \frac{P(x, y)\, dx\, dy}{z},$$

l'équation de la surface étant

$$z^2 = f(x_1) f(x_2) = F(x, y),$$

$F(x, y)$ étant un polynome en x et y.

Pour les mêmes raisons que plus haut, ces six intégrales doubles de seconde espèce se réduisent à *cinq;* elles sont distinctes si le polynome $f(x)$ du cinquième degré ne satisfait pas à certaines conditions particulières.

IV.

Sur les conditions pour qu'une surface soit hyperelliptique.

16. Nous avons indiqué plus haut (Section I de ce Chapitre) certaines propriétés d'une surface hyperelliptique, pour laquelle il

y a correspondance uniforme avec le prismatoïde des périodes. On peut se poser la question inverse, et se demander comment on reconnaîtra si une surface donnée de degré m

$$f(x, y, z) = 0$$

est susceptible d'avoir les coordonnées (x, y, z) d'un quelconque de ses points exprimées par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres, de telle sorte qu'à un point arbitraire de la surface ne corresponde qu'un seul système de valeurs de ces paramètres (aux périodes près).

On devra tout d'abord avoir pour la surface $r = 4$; il y aura alors pour la surface deux intégrales de différentielles totales de première espèce; soient

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} \quad \text{et} \quad \int \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z}.$$

Ces deux intégrales devront n'être pas fonctions l'une de l'autre. En outre, la surface doit être du genre géométrique *un*; enfin, nous avons montré que l'adjointe d'ordre $m - 4$ coupe, en dehors de la ligne double, la surface f suivant des courbes simples Γ de f qui sont unicursales (ces courbes peuvent manquer).

17. On peut montrer que ces conditions nécessaires sont suffisantes [1]; nous allons indiquer sommairement la démonstration. Soient

$$\begin{matrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \upsilon_1 & \upsilon_2 & \upsilon_3 & \upsilon_4 \end{matrix}$$

les quatre couples de périodes des deux intégrales précédentes. En se servant des théorèmes classiques dans la théorie des intégrales abéliennes, on obtient la relation entre ces périodes

$$\Sigma\, c_{ik}\omega_i\upsilon_k = 0 \qquad (c_{ik} = -c_{ki}) \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

---

[1] Comparez : E. Picard, *Journal de Math.*, 1885, p. 334; et 1889, p. 224. Dans le second Mémoire, M. Picard, s'appuyant sur une proposition de M. Nöther, dit que la condition relative à l'unicursalité des courbes Γ est remplie d'elle-même; mais la proposition de M. Nöther est sujette à des restrictions, et la condition doit être maintenue. C'est ce qui résulte d'un exemple de M. Castelnuovo, que nous avons cité (t. I, p. 223), relatif à une surface du cinquième ordre avec trois *tacnodes*.

les c étant des entiers, et le déterminant symétrique gauche

$$|c_{ik}|$$

n'étant pas nul, comme on le déduit de l'inégalité de Riemann fondamentale dans ce genre de question.

18. En effectuant simultanément sur les ω et les υ une substitution à coefficients entiers, dont le déterminant différent de zéro peut être *a priori* supérieur à un, on obtient de nouvelles périodes

$$(9') \qquad \begin{cases} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 \\ \Upsilon_1 & \Upsilon_2 & \Upsilon_3 & \Upsilon_4 \end{cases}$$

avec la relation

$$\Omega_1\Upsilon_2 - \Omega_2\Upsilon_1 + \Omega_3\Upsilon_4 - \Omega_4\Upsilon_3 = 0.$$

Il est alors possible de former avec un polynome du cinquième degré convenable $f(x)$ deux intégrales distinctes de première espèce

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{f(x)}}\,dx,$$

$$\int \frac{\alpha' x + \beta'}{\sqrt{f(x)}}\,dx,$$

dont le tableau des périodes corresponde à $(9')$,

Considérons alors les équations

$$(10) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = u, \\ \displaystyle\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = v, \end{cases}$$

et les équations

$$(11) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{(x_1^0, y_1^0)}^{(x_1, y_1)} \frac{(\alpha x_1 + \beta)\,dx_1}{y_1} + \int_{(x_2^0, y_2^0)}^{(x_2, y_2)} \frac{(\alpha x_2 + \beta)\,dx_2}{y_2} = u \\ \displaystyle\int_{(x_1^0, y_1^0)}^{(x_1, y_1)} \frac{(\alpha' x_1 + \beta')\,dx_1}{y_1} + \int_{(x_2^0, y_2^0)}^{(x_2, y_2)} \frac{(\alpha' x_2 + \beta')\,dx_2}{y_2} = v \end{cases} \qquad \left[y = \sqrt{f(x)}\right].$$

En égalant entre eux leurs premiers membres, on voit que toute fonction rationnelle

$$R(x_1, y_1;\ x_2, y_2),$$

symétrique par rapport à (x_1, y_1) et (x_2, y_2), est racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont fonctions rationnelles de (x, y, z). Il en résulte que

$$x, \quad y \quad \text{et} \quad z$$

sont des racines d'équations algébriques dont les coefficients sont des fonctions uniformes quadruplement périodiques de u et v.

Ainsi x, y et z définies par les équations (10) n'ont, pour chaque valeur de u et v, qu'un nombre limité de valeurs, et ont pour toute valeur finie de u et v le caractère d'une fonction rationnelle ou d'une fonction algébrique.

Nous ne nous sommes pas servis jusqu'ici de la condition relative aux courbes Γ. On se rappelle que l'on a

$$AB_1 - BA_1 = f'_z . Q(x, y, z),$$

$Q(x, y, z)$ étant l'adjointe d'ordre $m-4$. Tout d'abord, les courbes Γ étant unicursales, elles satisferont nécessairement aux équations différentielles

$$B\,dx - A\,dy = 0, \qquad B_1\,dx - A_1\,dy = 0,$$

puisque les deux intégrales de différentielles totales de première espèce, se réduisant pour une courbe Γ à des intégrales de fonctions rationnelles d'un paramètre, doivent être des constantes. Or, d'après les équations

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = du,$$

$$\frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z} = dv,$$

x, y, z ne pourront cesser d'être des fonctions uniformes de u et v que quand le point (x, y, z) viendra sur une courbe Γ. Mais, pour tous les points d'une courbe Γ, u et v se réduisent à deux constantes à des périodes près; nos fonctions algébroïdes de u et v ne pourront donc avoir de ligne critique pour laquelle deux ou plusieurs branches se permutent. Elles seront donc des fonctions uniformes, et, par suite, des fonctions quadruplement périodiques de u et v, comme nous voulions l'établir.

V.

Sur une classe d'équations aux dérivées partielles se rattachant à la théorie des fonctions abéliennes [1].

19. Arrêtons-nous un moment sur les équations différentielles de la forme

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{12}$$

f étant un polynome, et u désignant une fonction de deux variables indépendantes x et y.

Si u est une fonction quadruplement périodique de deux variables, qui ne se réduise pas à une fonction d'une combinaison linéaire de x et y, il y aura une relation algébrique de la forme (12) entre

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y},$$

et, si l'on pose

$$v = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial u}{\partial y},$$

à un point *arbitraire* de la surface

$$f(u, v, w) = 0$$

ne correspondront évidemment qu'un nombre limité de valeurs de (x, y) dans un parallélépipède des périodes.

Nous allons établir d'abord que *ce nombre limité de valeurs se réduit à un seul système de valeurs*.

20. Admettons qu'il y ait m valeurs de (x, y) correspondant à un point arbitraire (u, v, w) de f, soient

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_m, y_m).$$

Les sommes

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m, \qquad y_1 + y_2 + \ldots + y_m$$

seront nécessairement des intégrales de différentielles totales rela-

---

[1] E. Picard, *Journal de Mathématiques,* 1885, p. 338.

tives à la surface f

$$(13)\qquad \int^{(u,v,w)} P\,du + Q\,dw, \qquad \int^{(u,v,w)} P_1\,du + Q_1\,dw,$$

les P et Q étant rationnelles en (u, v, w).

Différents cas peuvent se présenter relativement à ces deux intégrales.

21. Supposons en premier lieu que ces deux intégrales se réduisent à des constantes. Faisons un peu varier et arbitrairement (u, v, w) de manière à passer à (u', v', w'), on aura les nouvelles valeurs de x et y voisines des précédentes

$$(x'_1, y'_1), \quad (x'_2, y'_2), \quad \ldots, \quad (x'_m, y'_m).$$

Nous aurons ici

$$(14)\qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_m = x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_m, \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_m = y'_1 + y'_2 + \ldots + y'_m. \end{cases}$$

Les quantités $x'_i - x_i$ sont de l'ordre de $(u' - u)$ et $(v' - v)$.

On a

$$u(x'_1, y'_1) - u(x_1\, y_1) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x'_1 - x_1) + \frac{\partial u}{\partial y_1}(y'_1 - y_1) + \ldots,$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur au premier, et des égalités analogues en remplaçant l'indice *un* par les indices *deux, trois*, ... Comme on a

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial u}{\partial x_m},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\partial u}{\partial y_2} = \ldots = \frac{\partial u}{\partial y_m},$$

et les égalités analogues avec les accents, il viendra, en additionnant et tenant compte des égalités (14),

$$m[u(x'_1, y'_1) - u(x_1, y_1)] = \text{quantité du deuxième ordre.}$$

Or ceci est impossible, puisque $(x'_1 - x_1)$ et $(y'_1 - y_1)$ sont du premier ordre; il faudrait que l'on eût, pour toute valeur de x_1 et y_1,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y_1} = 0,$$

ce qui n'a pas lieu.

22. Les deux intégrales (13) ne se réduisent pas toutes deux à des constantes. Or, nous allons montrer d'abord que ces deux intégrales ne peuvent être distinctes. En effet, en remplaçant u, v, w par leurs valeurs en x et y, elles deviennent respectivement

$$\alpha x + \beta y + \gamma, \qquad \alpha' x + \beta' y + \gamma',$$

les α, β, γ étant des constantes. Si les intégrales sont distinctes, $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ n'est pas nul; il en résulte que $\alpha x + \beta y$ et $\alpha' x + \beta' y$ et, par suite, x et y n'ont qu'une valeur pour u, v, w donnés, aux périodes près.

L'une des intégrales est donc égale à une fonction linéaire de l'autre; on peut supposer que

$$P_1\,du + Q_1\,dv = A(P\,du + Q\,dv),$$

A étant une constante. Gardons x comme variable, et prenons $y - Ax$ comme seconde variable, que nous continuerons à désigner par y. La somme

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m$$

est alors variable avec (u, v, w) et elle est une intégrale de première espèce, tandis que

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m = \text{const.}$$

L'intégrale de première espèce qui représente $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ sera susceptible de la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma.$$

La constante α n'est pas nulle, car alors y n'aurait qu'une valeur (étant une intégrale de première espèce) et, par suite, on aurait

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_m = \text{const.},$$

ce qui est absurde.

Prenons enfin, au lieu de la variable x, la combinaison $\alpha x + \beta y + \gamma$ comme variable; nous la désignerons encore par x, pour ne pas multiplier les notations. Alors, avec les deux variables x et y définitivement choisies, nous aurons

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m,$$

et, par suite, à un point arbitraire (u, v, w) de f correspondent

$$(x_1, y_1), \quad (x_1, y_2), \quad \ldots, \quad (x_1, y_m),$$

x étant le même partout.

Reprenons le raisonnement du numéro précédent en considérant un point arbitraire (u', v', w') de f, voisin de (u, v, w). On aura alors

$$m[u(x'_1, y'_1) - u(x_1, y_1)] = m(x'_1 - x_1)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \text{termes de degrés supérieurs.}$$

Mais ceci entraîne

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = 0$$

pour un système arbitraire de valeurs de x_1 et y_1, ce qui est impossible, car u serait une fonction d'une seule lettre combinaison linéaire des variables primitives x et y.

Nous avons épuisé toutes les suppositions, et *il nous faut donc conclure que*

$$m = 1,$$

comme nous l'avons énoncé.

23. Posons-nous maintenant la question suivante : Étant donnée l'équation aux dérivées partielles

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

peut-on y satisfaire en prenant pour u une fonction uniforme quadruplement périodique de x et y?

Tout d'abord la surface

$$f(u, v, w) = 0$$

devra satisfaire aux conditions de la Section précédente. On aura donc tout d'abord à rechercher si l'on peut exprimer u, v, w par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres x et y. La surface précédente devra admettre deux intégrales de première espèce

$$\int \frac{B\,du - A\,dv}{f'_w}, \qquad \int \frac{B_1\,du - A_1\,dv}{f'_w}.$$

On doit pouvoir trouver deux combinaisons linéaires indépendantes de ces intégrales, telles que les deux équations aux différentielles totales

$$\frac{(l\mathrm{B}+m\mathrm{B}_1)\,du-(l\mathrm{A}+m\mathrm{A}_1)\,dv}{f'_w}=dx,$$
$$\frac{(n\mathrm{B}+p\mathrm{B}_1)\,du-(n\mathrm{A}+p\mathrm{A}_1)\,dv}{f'_w}=dy$$

donnent, pour u, v, w, des fonctions quadruplement périodiques de x et y, et telles que

$$v=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad w=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Cherchons à quelles conditions on pourra déterminer les quatre constantes l, m, n, p de façon qu'il en soit ainsi; nous n'aurons qu'à calculer $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ à l'aide des équations précédentes. On trouve de suite, en posant comme plus haut $\mathrm{BA}_1-\mathrm{AB}_1=f'_w.\,\mathrm{Q}(u,v,w)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{n\mathrm{A}+p\mathrm{A}_1}{(lp-mn)\,\mathrm{Q}},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{l\mathrm{A}+m\mathrm{A}_1}{(lp-mn)\,\mathrm{Q}}.$$

Nous devrons avoir

$$\begin{aligned} n\mathrm{A}+p\mathrm{A}_1&=(lp-mn)\,\mathrm{Q}.v,\\ l\mathrm{A}+m\mathrm{A}_1&=-(lp-mn)\,\mathrm{Q}.w,\end{aligned}$$

et ces relations, devant avoir lieu, pour tout point de la surface, seront des identités en u, v, w, puisque les degrés des polynomes qui y figurent sont moindres que le degré de la surface. Nous pouvons donc enfin écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{A}\ &=-\mathrm{Q}.(mv+pw),\\ \mathrm{A}_1&=\mathrm{Q}.(\,lv+nw).\end{aligned}$$

Ainsi les polynomes A et A_1 doivent être divisibles par $\mathrm{Q}(u,v,w)$, et les quotients doivent être homogènes et linéaires en v et w. Lorsque ces conditions seront remplies, on aura par les divisions mêmes de A et de A_1 par Q les quatre constantes l, m, n, p, et les équations aux différentielles totales qui doivent donner u en fonctions de x et y seront complètement déterminées; on est donc ramené à la question traitée dans la Section précédente.

VI.

Sur une surface algébrique admettant une infinité discontinue de transformations birationnelles.

24. Les surfaces hyperelliptiques générales dont nous nous sommes occupés dans ce Chapitre donnent un exemple de surfaces admettant des transformations birationnelles en elles-mêmes dépendant de deux paramètres. Nous ne voulons pas nous occuper ici de l'intéressante question relative à la transformation birationnelle des surfaces en elles-mêmes. Nous terminerons seulement ce Chapitre en montrant que, pour une surface, contrairement à ce qui arrive pour une courbe ([1]), il peut y avoir une infinité *discontinue* de transformations birationnelles de la surface en elle-même, sans qu'il y existe une transformation *continue,* c'est-à-dire dépendant de un ou plusieurs paramètres arbitraires.

Ce fait a été signalé pour la première fois par M. Humbert, qui a indiqué un exemple emprunté à la théorie de la surface de Kummer (*Comptes rendus,* 30 janvier 1897). Peu après, M. Painlevé a donné un exemple plus simple ([2]) : nous allons indiquer l'exemple de M. Painlevé, où nous retrouverons quelques-unes des notions relatives aux surfaces algébriques étudiées dans cet Ouvrage.

En désignant par $p(z)$ la fonction elliptique, telle que la considère Weierstrass, envisageons la surface déterminée par les équations

$$x = p(u), \qquad y = p(v), \qquad z = \frac{p'(u)}{p'(v)}.$$

A un point arbitraire de la surface correspondent deux valeurs distinctes des paramètres, à savoir :

$$(u, v) \qquad \text{et} \qquad (-u, -v),$$

([1]) Pour ce point, on peut consulter le *Traité d'Analyse* de M. Picard (t. II, 2e édit., p. 483).

([2]) P. Painlevé, *Sur une surface admettant une infinité discontinue de transformations birationnelles* (*Comptes rendus,* 14 février 1897).

à des multiples près des périodes. Posons

$$(\Sigma)\qquad \begin{cases} U = mu + nv, \\ V = pu + qv, \end{cases}$$

m, n, p et q étant des entiers satisfaisant à la relation

$$mq - np = \pm 1.$$

A un point (x, y, z) de la surface correspondent les valeurs (u, v), $(-u, -v)$ et, par suite, les valeurs (U, V), $(-U, -V)$. Si donc on pose

$$X = \wp(U), \qquad Y = \wp(V), \qquad Z = \frac{\wp'(U)}{\wp'(V)},$$

X, Y, Z seront des fonctions rationnelles de x, y, z et inversement. Nous avons donc ainsi une infinité *discontinue* de transformations birationnelles de la surface en elle-même.

On voit de suite que la surface possède une infinité de courbes unicursales. Tout d'abord, pour $u = v$, on a une droite de la surface. La transformation Σ donne la courbe correspondant à

$$U = (m + n)u = \mu u,$$
$$V = (p + q)u = \nu u.$$

Or μ et ν peuvent être pris arbitrairement (entiers), pourvu qu'ils soient premiers entre eux. La courbe

$$x = \wp(\mu u), \qquad y = \wp(\nu u)$$

étant de degré aussi élevé qu'on le veut, nous sommes assurés d'avoir sur la surface des courbes unicursales dont le degré est aussi grand que l'on veut.

Ceci posé, nous allons montrer que la surface ne peut posséder une transformation birationnelle en elle-même dépendant d'au moins un paramètre arbitraire.

25. Remarquons d'abord qu'on aura pour la surface

$$p_g = 1;$$

car, si l'on envisage l'intégrale double

$$(15)\qquad \iint du\, dv,$$

on voit immédiatement, en l'écrivant de la manière suivante :

$$\int\int \frac{dx\,dy}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}},$$

qu'elle est de la forme

$$\int\int R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

R étant rationnelle en x, y et z; de plus, elle est de première espèce, d'après la forme (15).

Nous avons vu (t. I, p. 194) qu'une surface sur laquelle il existe une famille (dépendant d'un paramètre arbitraire) de courbes unicursales a nécessairement son genre géométrique nul. Il ne peut donc exister sur notre surface une telle famille de courbes unicursales.

Or supposons que la surface admette la transformation birationnelle

$$\text{(S)}\quad x' = \rho_1(t;\, x, y, z), \qquad y' = \rho_2(t;\, x, y, z), \qquad z' = \rho_3(t;\, x, y, z),$$

où l'on peut admettre que le paramètre t entre algébriquement dans les fonctions rationnelles ρ de x, y et z. Il faudra que cette transformation (S) transforme en elle-même chaque courbe unicursale de la surface, sans quoi la surface admettrait une famille de courbes unicursales, dépendant d'un paramètre arbitraire t. Donc, pour un point (x_0, y_0, z_0) d'une telle courbe, la transformation (S) donne, en faisant varier t, la courbe elle-même; *son degré est donc limité*. Mais il y a là une contradiction, puisque la surface contient des courbes unicursales dont le degré est aussi grand que l'on veut. Nous avons donc bien un exemple d'une surface possédant la propriété indiquée.

NOTE I.

SUR CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES ET SUR UNE CLASSE DE SURFACES ALGÉBRIQUES,

Par M. Émile Picard [1].

1. Dans un article sur une classe de surfaces algébriques dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres (*Bulletin de la Société mathématique,* t. XXVIII, 1900), j'ai appelé l'attention sur certaines surfaces algébriques. Ayant traité récemment cette question dans mon cours, je me suis aperçu que les considérations employées pouvaient être présentées sous une forme plus générale. C'est ce que je vais indiquer, en reprenant la question dès le début.

Envisageons d'abord une substitution rationnelle sur les m lettres $x, y, \ldots, t$,

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = R_1(x, y, \ldots, t), \\ y' = R_2(x, y, \ldots, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t' = R_m(x, y, \ldots, t). \end{cases}$$

On suppose que $x = y = \ldots = t = 0$ est un point double de cette substitution et que, dans le voisinage de ces valeurs, on peut écrire

$$\begin{aligned} x' &= ax + Q_1(x, y, \ldots, t), \\ y' &= by + Q_2(x, y, \ldots, t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t' &= lt + Q_m(x, y, \ldots, t), \end{aligned}$$

les Q étant des séries entières, commençant par des termes au moins du second degré; il est admis de plus que

$$|a| > 1, \qquad |b| > 1, \qquad \ldots, \qquad |l| > 1,$$

---

[1] *Comptes rendus,* 4 juillet 1904.

et enfin, on n'a pas entre deux quelconques des coefficients $a, b, \ldots, l$, soit par exemple a et b, de relations de la forme

$$a^h = b \quad \text{ou} \quad b^k = a \quad (h \text{ et } k \text{ entiers positifs}).$$

2. Ceci posé, on peut trouver des fonctions de m lettres $u, v, \ldots, w$,

$$f(u, v, \ldots, w), \quad \varphi(u, v, \ldots, w), \quad \ldots, \quad \psi(u, v, \ldots, w)$$

holomorphes dans le voisinage de $u = v = \ldots = w = 0$, méromorphes dans les plans de ces variables complexes, et satisfaisant aux équations fonctionnelles

$$(2) \quad \begin{cases} f(au, bv, \ldots, lw) = R_1(f, \varphi, \ldots, \psi), \\ \varphi(au, bv, \ldots, lw) = R_2(f, \varphi, \ldots, \psi), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi(au, bv, \ldots, lw) = R_m(f, \varphi, \ldots, \psi). \end{cases}$$

La démonstration de ce résultat peut se faire de différentes manières, soit par le calcul direct des coefficients des développements autour de l'origine, soit en procédant par approximations successives, comme je l'ai fait dans le cas beaucoup plus difficile où se présentent à l'origine des singularités essentielles (*Acta mathematica,* t. XVIII et XXIII, *Sur une classe de transcendantes nouvelles*).

On part de la remarque que l'équation fonctionnelle

$$f(au, bv, \ldots, lw) = af(u, v, \ldots, w) + P(u, v, \ldots, w),$$

où $P(u, v, \ldots, w)$ est une fonction holomorphe donnée autour de l'origine, commençant par des termes du second degré, détermine complètement f, si l'on suppose que le coefficient de la première puissance de u a une valeur donnée (soit l'unité). Il est alors facile de montrer que les approximations successives

$$\begin{aligned} f_n(au, bv, \ldots, lw) &= af_n(u, v, \ldots, w) + Q_1[f_{n-1}, \varphi_{n-1}, \ldots, \psi_{n-1}], \\ \varphi_n(au, bv, \ldots, lw) &= b\varphi_n(u, v, \ldots, w) + Q_2[f_{n-1}, \varphi_{n-1}, \ldots, \psi_{n-1}], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_n(au, bv, \ldots, lw) &= l\psi_n(u, v, \ldots, w) + Q_m[f_{n-1}, \varphi_{n-1}, \ldots, \psi_{n-1}], \end{aligned}$$

où l'on part de

$$f_0 = u, \quad \varphi_0 = v, \quad \ldots, \quad \psi_0 = w,$$

et où, dans $f_n, \varphi_n, \ldots, \psi_n$, les termes du premier degré sont respectivement $u, v, \ldots, w$, convergent uniformément vers une limite. On obtient ainsi la solution des équations (2), holomorphe autour de

l'origine; on fait enfin aisément, au moyen de ces équations fonctionnelles elles-mêmes, le prolongement analytique des fonctions pour toutes valeurs de u, v, $\ldots$, w, de manière à avoir des fonctions partout méromorphes.

3. Le résultat précédent s'étend au cas où l'on aurait, au lieu des m lettres indépendantes x, y, $\ldots$, t, ces m lettres liées par une relation algébrique admettant une transformation rationnelle en elle-même. Il suffira de prendre le cas d'une courbe et celui d'une surface algébrique.

Soit une courbe algébrique

$$F(x, y) = 0$$

admettant la transformation rationnelle

$$(3) \qquad \begin{cases} x' = R_1(x, y), \\ y' = R_2(x, y). \end{cases}$$

Nous supposons que l'origine soit un point simple de la surface et un point double de la transformation précédente. Alors, autour de l'origine, les équations (3) se ramènent à l'unique équation

$$x' = ax + Q_1(x),$$

Q_1 ne renfermant pas de terme du premier degré, et nous faisons l'hypothèse que $|a|$ est supérieur à *un*. Dans ces conditions l'analyse du paragraphe précédent est applicable, et l'on a finalement, pour la courbe F,

$$x = f(u), \qquad y = \varphi(u),$$

f et φ étant des fonctions méromorphes de u dans tout le plan, satisfaisant aux équations fonctionnelles

$$f(au) = R_1[f(u), \varphi(u)],$$
$$\varphi(au) = R_2[f(u), \varphi(u)].$$

Mais ce résultat ne donne rien de nouveau. En effet, de ce que $|a|$ est différent de *un*, il résulte que la courbe F admettra *une infinité* de transformations rationnelles en elles-mêmes et, par suite, elle sera du genre *zéro* ou *un*. Si la courbe est du genre *un*, la constante a sera nécessairement un entier (sauf le cas de multiplication complexe).

4. Que donnent les considérations précédentes pour une surface algébrique? Nous supposons que, pour une surface algébrique

$$F(x, y, z) = 0,$$



il y ait une transformation rationnelle en elle-même

$$x' = R_1(x, y, z),$$
$$y' = R_2(x, y, z),$$
$$z' = R_3(x, y, z)$$

susceptible, dans le voisinage de l'origine (point simple de la surface), de se mettre sous la forme

$$x' = ax + Q_1(x, y),$$
$$y' = by + Q_2(x, y),$$

Q_1 et Q_2 commençant par des termes au moins du second degré, en admettant de plus que

$$|a| > 1, \qquad |b| > 1.$$

On pourra alors exprimer les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la surface par les formules

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

f, φ, ψ étant des fonctions méromorphes de u et v, satisfaisant aux équations fonctionnelles

$$f(au, bv) = R_1[f(u, v), \varphi(u, v), \psi(u, v)],$$
$$\varphi(au, bv) = R_2[f(u, v), \varphi(u, v), \psi(u, v)],$$
$$\psi(au, bv) = R_3[f(u, v), \varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

Quelle est l'étendue de la classe des surfaces que nous venons de rencontrer? C'est une question à laquelle je ne puis malheureusement répondre.

La surface admettra manifestement une infinité de transformations en elles-mêmes, que l'on obtient en prenant les puissances successives de la transformation initiale. Quand il s'agissait d'une courbe, nous pouvions conclure qu'elle était de genre *zéro* ou *un*, mais on ne connaît rien de général sur une surface admettant une infinité *discontinue* de transformations rationnelles. On sait seulement, comme l'a montré le premier M. Humbert, qu'il existe des surfaces admettant une infinité discontinue de transformations rationnelles sans admettre une infinité continue, et M. Painlevé en a donné un second exemple extrêmement simple [1].

---

[1] *Voir* sur ce point le dernier Chapitre de ce Volume (dernière Section).

Les surfaces *hyperelliptiques* rentrent évidemment dans le type précédent, sans parler bien entendu des surfaces unicursales. Pour les surfaces hyperelliptiques générales, la multiplication par un entier p des arguments conduira au cas de

$$a = b = p.$$

Il serait, je crois, intéressant de rechercher s'il y a d'autres surfaces que les précédentes (avec leurs dégénérescences) rentrant dans la classe sur laquelle certaines équations fonctionnelles appellent ainsi l'attention.

NOTE II.

SUR L'IMPOSSIBILITÉ DE CERTAINES SÉRIES DE GROUPES DE POINTS SUR UNE SURFACE ALGÉBRIQUE,

Par M. Émile Picard (1).

1. On sait que l'on peut trouver sur une courbe algébrique une série de groupes de n points dépendant de n paramètres et correspondant uniformément à des fonctions abéliennes (non dégénérescentes) de n variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, c'est-à-dire de telle manière qu'à un système de valeurs des u ne corresponde en général qu'un groupe de points et que, inversement, à un groupe arbitraire de la série ne corresponde qu'un seul système de valeurs des u, abstraction faite des périodes. Le nombre n, comme il est classique, est égal au genre p de la courbe.

Une question analogue peut être posée pour les surfaces algébriques :

Est-il possible de trouver sur certaines surfaces algébriques des séries de groupes de n points, dépendant de 2n *paramètres, et cor-*

(1) *Journal de Mathématiques*, 5e série, t. IX.

respondant uniformément à des fonctions abéliennes (non dégénérescentes) de $2n$ *variables* $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$, *c'est-à-dire de telle manière qu'à un système de valeurs des u ne corresponde, en général, qu'un seul groupe de points, et que, inversement, à un groupe arbitraire de la série ne corresponde qu'un seul système des u, aux périodes près?*

Cette circonstance peut se présenter pour $n = 1$, et l'on a alors les surfaces hyperelliptiques. Il paraissait vraisemblable que, pour d'autres valeurs de n, on aurait des classes de surfaces algébriques jouissant de la propriété indiquée. *En réalité, il n'en existe pas;* c'est ce que je me propose de montrer ici.

2. Considérons donc la surface

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (\text{de degré } m),$$

et, en supposant n supérieur à *un*, soient (x_1, y_1, z_1), ..., (x_n, y_n, z_n) les coordonnées de n points arbitraires de la surface. Désignons par

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_{2n+1}$$

$2n+1$ fonctions rationnelles symétriques des (x, y, z), prises d'ailleurs arbitrairement, on aura une hypersurface

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n+1}) = 0,$$

dans l'espace à $2n+1$ dimensions, et, de plus, puisque les fonctions symétriques ξ sont arbitrairement choisies, cette surface correspondra *uniformément* au groupe des n points.

D'après les hypothèses faites, les coordonnées d'un point arbitraire de la surface F s'exprimeront uniformément par des fonctions abéliennes de $2n$ variables $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$. La notion de genre géométrique s'étend immédiatement des surfaces de l'espace à trois dimensions aux hypersurfaces dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions. Notre surface F ne pourra posséder qu'une seule intégrale multiple de première espèce d'ordre $2n$, et cette intégrale correspondra à l'intégrale multiple

$$\int\int\ldots\int du_1\, du_2 \ldots du_{2n};$$

le genre géométrique de la surface F est donc égal à *un*. De plus, la surface F aura $2n$ intégrales de différentielles totales de première espèce, dont l'inversion donnera les ξ en fonctions abéliennes des u.

A chaque intégrale de différentielle totale de première espèce de la surface F correspond une intégrale de différentielle totale de première espèce de la surface f et inversement. Il en résulte que la surface f possédera $2n$ intégrales de différentielles totales de première espèce linéairement indépendantes

$$(1) \qquad \int P_i\,dx + Q_i\,dy \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

les P et Q étant rationnelles en x, y et z; ces $2n$ intégrales auront $4n$ périodes. On voit de plus aisément, à cause de la symétrie des ξ par rapport à (x_1, y_1, z_1), ..., (x_n, y_n, z_n), que le groupe des n points sera donné par les $2n$ équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{h=1}^{h=n} P_i(x_h, y_h, z_h)\,dx_h + Q_i(x_h, y_h, z_h)\,dy_h = du_i \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n). \end{array} \right.$$

3. Ceci posé, montrons que la surface f ne peut être d'un genre géométrique supérieur à l'unité. Soit, en effet,

$$(\alpha) \qquad \iint \frac{S(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

une intégrale double de première espèce de f. Formons l'intégrale multiple d'ordre $2n$

$$(3) \qquad \iint\cdots\int \frac{S_1 S_2 \ldots S_n}{f'_{z_1} f'_{z_2} \cdots f'_{z_n}}\,dx_1\,dy_1 \ldots dx_n\,dy_n,$$

où S_i et f'_{z_i} désignent respectivement $S(x_i, y_i, z_i)$ et $f'_{z_i}(x_i, y_i, z_i)$.

On peut écrire

$$dx_1\,dy_1 \ldots dx_n\,dy_n = \frac{d\xi_1\,d\xi_2 \ldots d\xi_{2n}}{\dfrac{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n})}{D(x_1, y_1, \ldots, y_n)}},$$

le dénominateur étant le déterminant fonctionnel de ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{2n} par rapport aux $2n$ variables indépendantes x_1, y_1, ..., x_n, y_n. Or il est aisé de vérifier que ce déterminant fonctionnel est une fonction rationnelle et symétrique de (x_1, y_1, z_1), ..., (x_n, y_n, z_n). C'est évidemment une fonction rationnelle et, pour voir qu'elle est symétrique, il

suffit de remarquer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{2n} \\ a'_1 & a'_2 & \ldots & a'_{2n} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_{2n} \\ b'_1 & b'_2 & \ldots & b'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_{2n} \\ l'_1 & l'_2 & \ldots & l'_{2n} \end{vmatrix},$$

où les lettres $(a, b, \ldots, l)$ sont en nombre n, ne change pas si l'on permute entre eux deux couples de lignes associées, par exemple si l'on permute les lignes (a, a') et les lignes (b, b'). On remarquera que pareille circonstance ne se présenterait pas dans le cas d'une courbe, et d'une manière plus générale dans le cas d'une fonction algébrique d'un nombre impair de variables indépendantes.

Il résulte de là que l'intégrale (3) est de la forme

$$\int\int\ldots\int \Theta \, d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_{2n},$$

où Θ est une fonction rationnelle symétrique de (x_1, y_1, z_1), $\ldots$, (x_n, y_n, z_n) et, par suite, une fonction rationnelle de ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_{2n+1}. Elle est donc une intégrale multiple d'ordre $2n$ de première espèce pour F. Si f est de genre supérieur à *un*, il est clair alors que l'on pourra former pour l'hypersurface F plus d'une intégrale multiple d'ordre $2n$ de première espèce, ce qui est en opposition avec ce que nous avons dit plus haut.

4. Le genre géométrique de f est donc au plus égal à *un;* mais, d'autre part, il ne peut être égal à *zéro*. On démontre en effet (*voir* t. I, p. 137) que si

$$\int P_i \, dx + Q_i \, dy \quad \text{et} \quad \int P_k \, dx + Q_k \, dy$$

sont deux intégrales de différentielles totales de première espèce relatives à la surface f, on a l'identité

$$P_i Q_k - P_k Q_i = \frac{M(x, y, z)}{f'_z},$$

où $M(x, y, z)$ est un polynome adjoint d'ordre $m-4$, c'est-à-dire

un polynome tel que l'intégrale double

$$\iint \frac{M(x, y, z)}{f'_z}\, dx\, dy$$

est de première espèce. Si le genre géométrique de f était nul, on aurait nécessairement

$$P_i Q_k - P_k Q_i = 0;$$

par suite, les $2n$ intégrales (1) seraient fonctions les unes des autres, et les $2n$ équations (2) ne pourraient être distinctes.

En désignant donc, comme plus haut, par (α) l'intégrale double de première espèce relative à la surface f de genre *un*, nous aurons les identités

$$P_i Q_k - P_k Q_i = A_{ik} \frac{S(x, y, z)}{f'_z},$$

les A_{ik} étant des constantes qui ne sont pas toutes nulles. On peut supposer A_{ik} différent de zéro pour $i = 1$, $k = 2$; nous écrirons

$$P_1 Q_2 - P_2 Q_2 = C \frac{S(x, y, z)}{f'_z},$$

C étant une constante différente de zéro, et soient

$$P_2 Q_3 - P_3 Q_2 = A \frac{S(x, y, z)}{f'_z},$$
$$P_3 Q_1 - P_1 Q_3 = B \frac{S(x, y, z)}{f'_z},$$

A et B étant deux constantes. De ces identités on conclut

$$AP_1 + BP_2 + CP_3 = 0,$$
$$AQ_1 + BQ_2 + CQ_3 = 0,$$

et ces relations sont inadmissibles, puisque les trois intégrales

$$\int P_1\, dx + Q_1\, dy, \quad \int P_2\, dx + Q_2\, dy, \quad \int P_3\, dx + Q_3\, dy$$

sont linéairement indépendantes. Nous arrivons donc à une contradiction, et, *par suite, on doit répondre par la négative à la question posée au n° 1.*

5. La question que nous venons de traiter soulève d'autres problèmes qu'il serait intéressant d'examiner. Il a été expressément

mentionné que la série de groupes des n points devait correspondre uniformément à des fonctions abéliennes *non dégénérescentes*. On pourrait s'affranchir de cette dernière restriction. On aurait toujours la surface F et $2n$ intégrales de différentielles totales relatives à cette surface, mais qui ne seraient plus alors nécessairement de première espèce. De plus, tandis que tout à l'heure une intégrale de différentielle totale relative à F devait nécessairement, quand on remplaçait les ξ par leurs valeurs en (x_1, y_1, z_1), ..., (x_n, y_n, z_n), se ramener à la forme

$$\sum_{h=1}^{h=n} \int P_i(x_h, y_h, z_h)\,dx_h + Q_i(x_h, y_h, z_h)\,dy_h,$$

conséquence nécessaire de ce que l'intégrale est de première espèce, maintenant l'intégrale transformée pourrait *a priori* être de la forme

$$\int P_1\,dx_1 + Q_1\,dy_1 + P_2\,dx_2 + Q_2\,dy_2 + \ldots + P_n\,dx_n + Q_n\,dy_n,$$

les P et Q dépendant rationnellement de l'ensemble des coordonnées (x_1, y_1, z_1), ..., (x_n, y_n, z_n); on aurait là une intégrale de différentielle totale *mêlée* relative à n points *arbitraires* de la surface et symétrique par rapport à ces n points. Quoi qu'il en soit, il y a là un point à discuter, et d'une manière plus générale ces intégrales *mêlées* peuvent présenter quelque intérêt.

6. On peut encore se poser une autre question. En restant dans le cas des fonctions abéliennes non dégénérescentes, on pourrait considérer une fonction algébrique de *trois* variables indépendantes donnée par une équation

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

et se poser pour cette hypersurface le problème que nous avons traité pour les surfaces de l'espace à trois dimensions : existe-t-il sur certaines hypersurfaces algébriques des séries de groupes de n points, dépendant de $3n$ paramètres et correspondant uniformément à des fonctions abéliennes (non dégénérescentes) de $3n$ paramètres. La parité du nombre des variables indépendantes jouait un rôle important dans la démonstration qu'on a lue plus haut; ici, avec trois variables indépendantes au lieu de deux, la démonstration du théorème (à supposer qu'il soit exact) devra être assez notablement modifiée. La même question se pose pour les fonctions algébriques d'un nombre *impair* quelconque de variables indépendantes.

NOTE III.

SUR LES FONCTIONS RATIONNELLES DE TROIS VARIABLES COMPLEXES [1],

Par M. Émile Picard.

---

1. Quand on passe du domaine de deux variables complexes à celui de trois variables, on peut de deux manières différentes étendre les notions relatives aux intégrales multiples. Bornons-nous ici au cas des fonctions rationnelles.

Nous pouvons, en premier lieu, considérer l'intégrale double

$$\iint A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy \tag{1}$$

(où A, B, C sont des fonctions rationnelles de x, y et z), étendue à un certain continuum à deux dimensions dans l'espace à six dimensions relatif aux trois variables complexes; le sens de cette intégrale se détermine en employant toujours les mêmes considérations. La condition pour que le théorème de Cauchy s'étende à une telle intégrale, c'est-à-dire pour que cette intégrale étendue à une surface *fermée* soit nulle quand on peut, par une déformation continue, réduire cette surface à une courbe ou à un point sans rencontrer de valeurs de x, y, z pour lesquelles A, B, C cessent d'être continues, est ici, comme dans le cas des quantités réelles,

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

En supposant vérifiée cette condition d'*intégrabilité,* nous allons chercher quels seront les *résidus* de cette intégrale double, c'est-à-dire les diverses valeurs de cette intégrale prise sur une surface fermée à deux dimensions. Nous allons d'ailleurs nous borner au cas où l'on aurait

$$A = \frac{P}{S}, \qquad B = \frac{Q}{S}, \qquad C = \frac{R}{S},$$

---

[1] *Journal de Mathématiques,* 1889, p. 61.

P, Q, R, S étant des polynomes en x, y, z, le dernier étant supposé irréductible. La condition d'intégrabilité s'écrira alors

$$(2)\qquad P\frac{\partial S}{\partial x}+Q\frac{\partial S}{\partial y}+R\frac{\partial S}{\partial z}=S\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right).$$

Supposons d'abord que nous laissions à x une valeur constante, d'ailleurs arbitraire; notre intégrale double se réduit alors à

$$\iint\frac{P(x,y,z)\,dy\,dz}{S(x,y,z)}.$$

Prenons alors, dans le domaine des deux variables complexes y et z, les résidus de cette intégrale double. Ceux-ci seront les périodes de l'intégrale abélienne ordinaire

$$(3)\qquad \int\frac{P\,dy}{\dfrac{\partial S}{\partial z}},$$

relative à la relation algébrique entre y et z,

$$S(x,y,z)=0.$$

Dans tout ceci, x figure comme un paramètre d'ailleurs arbitraire. Mais les résidus de l'intégrale double (1), si la condition d'intégrabilité est remplie, doivent être des constantes; il faut donc que les périodes de l'intégrale (3) ne dépendent pas de x. Il est essentiel de le vérifier, et cette vérification va précisément nous ramener à certain ordre d'idées qui a joué un rôle important dans plusieurs parties de cet Ouvrage.

La relation (2), en effet, n'est pas nouvelle pour nous; elle joue un rôle fondamental dans l'étude des intégrales de différentielles totales relatives aux surfaces algébriques. Je dis que l'intégrale

$$\int\frac{P\,dy-Q\,dx}{S'_z}$$

est une intégrale de différentielle totale relative à la surface algébrique $S(x,y,z)=0$.

Il faut donc montrer, comme conséquence de l'identité (2), que

$$\frac{\partial\left(\dfrac{Q}{S'_z}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\dfrac{P}{S'_z}\right)}{\partial x}=0,$$

x, y et z étant liés par la relation $S(x,y,z)=0$.

En développant l'égalité précédente, on a

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial y} S'_z - \frac{\partial Q}{\partial z} S'_y\right) S'_z - Q(S''_{zy} S'_z - S''_{z^2} S'_y)$$
$$+\left(\frac{\partial P}{\partial x} S'_z - \frac{\partial P}{\partial z} S'_x\right) S'_z - P(S''_{zx} S'_z - S''_{z^2} S'_x) = 0.$$

Nous pouvons remplacer $PS'_x + QS'_y$ par $-RS'_z$ d'après l'identité (2). Nous avons alors S'_z en facteur, et la relation à vérifier devient

$$-(QS''_{zy} + PS''_{zx} + RS''_{z^2}) + S'_z\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) - S'_x \frac{\partial P}{\partial z} - S'_y \frac{\partial Q}{\partial z} = 0.$$

Or différentions maintenant l'identité (2) par rapport à z, et faisons dans le résultat $S = 0$, nous aurons précisément la relation précédente.

Nous avons ainsi vérifié que les périodes de l'intégrale (3) ne dépendent pas de x, puisque ces périodes sont des périodes de l'intégrale de différentielle totale

$$\int \frac{P\,dy - Q\,dx}{S'_z}.$$

Donc les périodes de cette intégrale simple seront des résidus de l'intégrale double (1). Réciproquement, d'ailleurs, tout résidu de (1) sera une période de l'intégrale précédente, car tout résidu peut toujours se ramener à l'intégrale prise le long d'une sorte de tore enveloppant un cycle linéaire de la surface algébrique $S(x, y, z) = 0$.

On voit que l'étude des intégrales de la forme (1), quand A, B, C sont des fonctions rationnelles, se rattache étroitement à la théorie des surfaces algébriques.

2. Il va en être de même pour la seconde catégorie d'intégrales multiples que l'on peut encore considérer. Envisageons maintenant l'intégrale triple

$$\iiint \frac{P\,dx\,dy\,dz}{Q}, \tag{1}$$

P et Q étant des polynomes en x, y, z; la définition de cette intégrale, étendue à un continuum à trois dimensions, se fait toujours d'après les mêmes principes. Nous n'avons ici aucune condition d'intégrabilité; cette intégrale, étendue à un continuum *fermé,* est nulle, quand ce continuum peut se réduire à un continuum de moins de trois dimensions sans rencontrer de systèmes de valeurs x, y, z, pour lesquelles Q s'annule.



Cherchons quels sont les résidus de cette intégrale, c'est-à-dire les diverses valeurs qu'elle prend, quand on l'étend à un continuum fermé quelconque à trois dimensions.

Donnons d'abord à x et à y des valeurs fixes, et considérons une racine de l'équation en z

$$Q(x, y, z) = 0.$$

Le résidu ordinaire correspondant de l'intégrale simple

$$\int \frac{P\,dz}{Q}$$

sera manifestement

$$\frac{P}{Q'_z}.$$

Nous avons donc maintenant à considérer l'intégrale double

$$\iint \frac{P\,dx\,dy}{Q'_z}. \tag{2}$$

Quel devra être le champ de l'intégration? Cette intégrale double devra être étendue à un continuum *fermé* de points analytiques (x, y, z) ou, en d'autres termes, d'après nos définitions précédentes, à un *cycle à deux dimensions*, de la surface Q.

Nous en concluons que les résidus de l'intégrale triple (1) sont les périodes de l'intégrale double (2), cette intégrale double étant relative à la surface algébrique $Q(x, y, z) = 0$. Ces périodes ont été étudiées dans plusieurs Chapitres de ce Volume.

3. Nous avons (page 218 de ce Volume) cherché à quelles conditions une fonction rationnelle donnée $F(x, y)$ des deux variables x et y est susceptible de se mettre sous la forme

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

P et Q étant rationnelles en x et y; dans cette question sont intervenus les résidus de l'intégrale double

$$\iint F(x, y)\,dx\,dy.$$

Une question analogue, mais moins simple, se pose pour une fonction rationnelle donnée

$$F(x, y, z)$$

des trois variables x, y et z, à savoir de *rechercher les conditions sous lesquelles on a*

$$F(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

P, Q et R étant rationnelles en x, y et z. Nous laissons au lecteur le soin de l'étudier.

NOTE IV.

SUR CERTAINES SURFACES POUR LESQUELLES LES COORDONNÉES D'UN POINT S'EXPRIMENT PAR DES FONCTIONS UNIFORMES DE DEUX PARAMÈTRES,

Par M. Émile Picard.

1. On sait, depuis les célèbres travaux de M. Poincaré sur les fonctions *fuchsiennes*, que les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique peuvent s'exprimer par des fonctions d'un paramètre qui sont uniformes dans tout leur domaine d'existence. Comme je l'ai montré [1] autrefois, il n'est pas possible que, dans une telle représentation paramétrique, les fonctions employées aient des points singuliers essentiels *isolés,* quand le genre de la courbe est supérieur à l'unité.

La représentation paramétrique des surfaces algébriques par des fonctions de deux paramètres qui soient uniformes dans tout leur domaine d'existence est au contraire bien peu avancée. La seule classe bien étudiée des surfaces jouissant de cette propriété sont les surfaces hyperelliptiques et leurs dégénérescences. Existe-t-il d'autres surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions analytiques de deux variables ayant partout à

[1] E. Picard, *Bulletin des Sciences mathématiques,* 1883, et *Acta Mathematica,* t. XI.

distance finie le caractère d'une fonction rationnelle? C'est une question à laquelle on ne peut actuellement répondre. Dans la Note I de ce Volume, j'ai indiqué des surfaces algébriques possédant une représentation paramétriqne de cette nature, mais je ne suis pas certain qu'il en existe en dehors des surfaces hyperelliptiques et de leurs dégénérescences, quoique cela paraisse probable.

2. Les fonctions *hyperfuchsiennes* et *hyperabéliennes,* dont je me suis occupé dans différents Mémoires, conduisent à des classes certainement très étendues de surfaces algébriques jouissant de la propriété cherchée.

J'ai appelé *groupe hyperfuchsien* relatif aux deux variables x et y un groupe de substitutions linéaires de la forme

$$\left(x, y; \quad \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c}, \quad \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{ax + by + c}\right) \tag{1}$$

qui conservent l'hypersphère

$$xx_0 + yy_0 - 1 = 0$$

(x_0 et y_0 désignant les quantités conjuguées de x et y), ce groupe étant discontinu à l'intérieur de cette hypersphère [1].

Certains exemples de groupes hyperfuchsiens m'ont été fournis par des considérations arithmétiques relatives aux formes ternaires d'Hermite à indéterminées conjuguées. Les fonctions hypergéométriques de deux variables m'ont aussi donné des exemples intéressants de groupes hyperfuchsiens [2]. Ces fonctions sont données par l'intégrale

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du,$$

où g et h désignent deux des quantités 0, 1, x, y et ∞. On sait qu'elles satisfont à un système S de trois équations linéaires aux dérivées partielles, ayant trois solutions communes linéairement indépendantes. En désignant par ω_1, ω_2, ω_3 trois de ces solutions convenable-

---

(1) E. Picard, *Acta Mathematica*, t. I, II et V. — *Voir* aussi Wirtinger, *Académie des Sciences de Vienne,* 1899, et R. Alezais, *Annales de l'École Normale,* 1902.

(2) E. Picard, *Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables* (*Annales de l'École Normale,* 1885).

ment choisies, et posant

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = X, \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1} = Y,$$

il correspondra au groupe de S un groupe de la forme (1), et ce groupe sera hyperfuchsien quand les conditions suivantes seront remplies; prenons deux quelconques des quatre quantités λ, μ, b_1 et b_2, soit par exemple λ et b_1, la différence $\lambda + b_1 - 1$ doit être l'inverse d'un nombre entier positif, et pareillement, si l'on prend trois quelconques de ces quantités, soit λ, μ et b_1, la différence $2 - \lambda - \mu - b_1$ est encore égale à l'inverse d'un entier positif. Je citerai l'exemple

$$\lambda = \mu = b_1 = b_2 = \frac{3}{5}$$

pour lequel le *polyèdre fondamental* du groupe est tout entier à l'intérieur de l'hypersphère limite.

Tout récemment M. Hurwitz [1] a développé des considérations importantes sur la formation générale des groupes hyperfuchsiens, et l'on peut consulter aussi sur ce sujet des Mémoires intéressants de M. Fubini dans les *Annali di matematica* (avril 1905) et (*Rendiconti del circolo matematico di Palermo,* t. XXI, 1906).

3. A chaque groupe hyperfuchsien correspondent des fonctions hyperfuchsiennes restant invariables par les substitutions du groupe, et entre trois fonctions relatives à un même groupe il existe une relation algébrique. *C'est ainsi que l'on est conduit, pour chaque groupe, à une classe de surfaces algébriques.*

Il n'a été formé jusqu'ici aucun exemple *effectif* de surface hyperfuchsienne. Nous avons cherché, M. Alezais et moi [2], à préparer le terrain pour une telle recherche dans un cas très particulier, en faisant une étude arithmétique préliminaire.

Considérons la forme ternaire à indéterminées conjuguées

$$uu_0 + vw_0 + v_0 w$$

et le groupe des substitutions à entier complexe du type $a + b\rho$ (où ρ est une racine cubique imaginaire de l'unité). Un groupe hyper-

---

(1) Hurwitz, *Zur Theorie der automorphen Funktionen von beliebig vielen Variabeln* (*Math. Annalen,* t. LXI).

(2) E. Picard, *Comptes rendus*, 1882. — R. Alezais, *Annales de l'École Normale,* 1904.

fuchsien G se trouve ainsi défini. Envisageons en outre les substitutions à coefficients de même espèce, qui reproduisent cette forme multipliée par l'entier réel k et qu'on peut appeler *substitutions d'ordre* k; appelons U et V deux telles substitutions. On dira qu'elles sont équivalentes, quand il existe une substitution T d'ordre *un* telle que l'on ait

$$TU = V.$$

Il n'y a qu'un nombre limité de substitutions *non équivalentes* d'ordre k, et ce nombre est égal à $2(k^2 + k + 1)$, quand k est premier et de la forme $3m + 1$. Il joue un rôle important dans l'évaluation du degré des surfaces hyperfuchsiennes qu'on peut faire correspondre au groupe G.

4. J'ai appelé *groupe hyperabélien* [1] relatif aux deux variables x et y un groupe *discontinu* dont les substitutions sont de l'une et l'autre forme

$$\left(x, y;\quad \frac{ax+b}{cx+d},\quad \frac{a'y+b'}{c'y+d'}\right),$$
$$\left(x, y;\quad \frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta},\quad \frac{\alpha' x+\beta'}{\gamma' x+\delta'}\right),$$

les variables x et y restant respectivement dans un demi-plan (ou dans un cercle).

L'étude arithmétique des formes quaternaires réelles réductibles au type

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$$

m'a donné des exemples de groupes hyperabéliens.

Antérieurement, certaines fonctions abéliennes du genre *deux* m'avaient permis de définir facilement des groupes hyperabéliens. Désignons, suivant l'usage, par

$$\begin{matrix} 1 & 0 & G & H, \\ 0 & 1 & H & G' \end{matrix}$$

le Tableau des périodes des intégrales normales d'une courbe de genre *deux*, et supposons qu'on ait la relation

$$H^2 - GG' = D, \tag{1}$$

D étant un entier positif. Dans l'ensemble des transformations du

(1) E. Picard, *Journal de Mathématiques*, 1885. — H. Bourget, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1898.

premier ordre correspondant à la fonction abélienne de genre deux, on peut détacher un groupe de transformations Γ laissant invariable la relation (1).

Ceci dit, on satisfait à (1) en posant

$$H = \sqrt{D}\,\frac{x-y}{x+y}, \qquad G = -\frac{2\sqrt{D}}{x+y}, \qquad G' = \frac{2\sqrt{D}\,xy}{x+y}.$$

Or on démontre qu'au groupe Γ correspond pour x et y un groupe hyperabélien. L'étude de ce groupe a été approfondie par M. H. Bourget. Dans ses profondes recherches sur les fonctions abéliennes singulières, M. Humbert [1] a étudié des relations entre G, H et G′ plus générales que la relation (1).

M. Blumenthal [2] s'est occupé de la recherche des substitutions fondamentales de groupes hyperabéliens, d'un type étendu et relatif à un nombre quelconque de variables.

5. A chaque groupe hyperabélien correspondent des fonctions hyperabéliennes, et entre trois de ces fonctions il existe une relation algébrique conduisant à une surface hyperabélienne.

La théorie des fonctions abéliennes singulières correspondant à la relation (1) pour $D = 2$ a conduit M. Humbert à quelques exemples *effectifs* très simples de surfaces hyperabéliennes (*Comptes rendus*, 1899; *Sur les surfaces hyperabéliennes*).

Ainsi la surface du quatrième degré

$$\frac{xy+z}{xy-z} = \frac{xz+y}{x-yz}$$

est hyperabélienne, et l'on a pour elle la représentation paramétrique

$$x = \frac{\vartheta_{23}\vartheta_{01}}{\vartheta_4\vartheta_5}, \qquad y = \frac{\vartheta_{23}\vartheta_2}{\vartheta_4\vartheta_{34}}, \qquad z = \frac{\vartheta_{01}\vartheta_2}{\vartheta_5\vartheta_{34}},$$

les ϑ désignant les fonctions *thêta* normales du premier ordre d'arguments nuls.

6. Quel est le degré de généralité des surfaces hyperfuchsiennes et hyperabéliennes? C'est une question à laquelle je ne puis répondre. Il est extrêmement peu probable que l'on obtienne ainsi toutes les surfaces algébriques, car les groupes hyperfuchsiens et hyperabéliens

---

(1) G. Humbert, *Les fonctions abéliennes singulières* (*Journal de Mathématiques*, de 1899 à 1904).

(2) O. Blumenthal, *Mathematische Annalen*, t. LVI.

sont en fait très particuliers. Il n'en est pas dans le cas de deux variables comme dans celui d'une seule variable, où, avec les groupes de substitutions du type

$$\left(x, \frac{ax+b}{cx+d}\right),$$

on avait tous les cas de substitutions birationnelles.

Dans le cas de deux variables, il faudrait considérer tous les groupes discontinus dont les substitutions sont birationnelles

$$x' = \mathrm{R}(x, y),$$
$$y' = \mathrm{R}_1(x, y).$$

Dans les groupes hyperfuchsiens, R et R_1 sont linéaires (fractionnaires); déjà les groupes hyperabéliens appartiennent au type quadratique où R et R_1 sont du second degré.

Il n'est d'ailleurs pas certain qu'à tout groupe discontinu de la forme précédente correspondent des fonctions restant invariables par les substitutions de ce groupe, comme le montre l'exemple du groupe

$$(x, y;\ x + a_i, y + b_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

d'après le théorème classique sur les fonctions quadruplement périodiques.

Dans un ordre d'idées voisin, je rappellerai, en terminant, une question que j'ai posée autrefois (*Journal de Mathématiques,* 1889, p. 309) et où figuraient des groupes de substitutions de la forme

$$(x, y;\ ax + b,\ cy + d).$$

Les progrès faits depuis dans la théorie des cycles linéaires permettraient probablement de la résoudre.



NOTE V.

SUR QUELQUES RÉSULTATS NOUVEAUX DANS LA THÉORIE DES SURFACES ALGÉBRIQUES,

Par MM. Castelnuovo et Enriques.

M. Picard a bien voulu nous demander d'ajouter à son Traité une courte exposition des résultats sur les surfaces algébriques, qu'on a obtenus dernièrement en Italie, et qui n'ont pas trouvé place dans son Ouvrage. Il a voulu ainsi nous fournir le moyen de faire connaître à un public plus large l'état actuel de la théorie des fonctions de deux variables suivant notre point de vue géométrique.

Nous tâcherons de répondre par cette Note, aussi bien qu'il nous sera possible, à la proposition très aimable de M. Picard.

PREMIÈRE PARTIE.

---

1. Il convient d'abord de rappeler brièvement les concepts et les résultats fondamentaux, auxquels se rapportent les développements des Chapitres IV, V, VI du Tome II de ce Traité, en y ajoutant quelques remarques plus récentes.

On sait d'abord ce que c'est qu'un *système linéaire* de courbes (algébriques) tracées sur une surface (algébrique) (¹); on sait de même qu'on appelle *complet* un système linéaire $|C|$ de courbes, qui n'est pas renfermé dans un système linéaire plus ample de courbes du même ordre douées des mêmes *points-base* (²).

(¹) Tome II, Chapitre V, page 93 et suivantes.
(²) Page 101.

Une courbe C étant donnée sur la surface F, un système linéaire complet $|C|$ (de dimension $\geqq 0$) auquel C appartient, est déterminé, *pourvu que l'on donne sur* C *les points-base* qu'on veut imposer à $|C|$ [1]; il convient d'ajouter que $|C|$ pourra bien posséder de nouveaux points-base *accidentaux* (qu'on peut regarder comme virtuellement inexistants), en dehors de ceux qui lui ont été *imposés*.

Rappelons encore qu'on opère sur les systèmes complets, tracés sur une surface, par addition [2] et par soustraction [3], et qu'on est toujours amené à de nouveaux systèmes complets, pourvu toutefois (dans le second cas) que l'opération soit possible.

Il convient d'ajouter que pour chaque système linéaire on peut définir, en relation avec ses points-base imposés, deux nombres entiers, invariants vis-à-vis des transformations birationnelles de la surface : *le genre* (virtuel) π de la courbe générale du système; le *degré* (virtuel) du système, c'est-à-dire le nombre des intersections de deux courbes générales du système, en dehors de ses points-base imposés (il est sous-entendu que chaque intersection doit être évaluée en ayant égard à sa multiplicité pour les courbes en question).

Si l'on somme deux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, dont les genres et les degrés soient respectivement π_1, π_2, n_1, n_2, le genre et le degré de $|C_1+C_2|$ s'expriment par les formules

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1,$$
$$n = n_1 + n_2 + 2i,$$

où i désigne le nombre des intersections d'une courbe C_1 et d'une courbe C_2 [4].

Au moyen de ces formules on peut définir le genre et le degré d'un *système quelconque, réductible ou même composé d'une seule courbe* (dimension $r=0$), ce qui permet d'éliminer tout cas d'exception dans les calculs [5].

2. La notion des courbes adjointes à un système linéaire $|C|$, sur une surface F, se trouve établie dans le Chapitre VI (p. 117 et suiv.).

---

(1) *Cf.*, page 102. L'énoncé ci-dessus est un peu plus général que celui donné dans le texte. On peut l'établir par la même voie, ou bien par le raisonnement très simple (et presque immédiat) donné par M. ENRIQUES dans sa Note : *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche* (*Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino,* 1901).

(2) Page 104.

(3) Page 111.

(4) *Cf.*, pour la première formule, page 107.

(5) ENRIQUES, *Intorno ai fondamenti... loc. cit.*, n° 12.

On a donné récemment une définition très simple de ces courbes (¹).

Supposons d'abord que le système $|C|$ renferme (totalement) les sections planes de F. On sait alors que les courbes adjointes C′ sont découpées sur F par les surfaces adjointes φ_{n-3} de l'ordre $n-3$ (n désignant l'ordre de F). Or on peut obtenir les C′ en construisant d'abord le système complet $|K|$ découpé sur F par les surfaces polaires φ_{n-1} (en faisant abstraction des points-base qui tombent dans les points-pince de la courbe double de F, points qu'on doit envisager comme accidentaux), et puis en considérant le système résiduel de deux courbes C par rapport à K

$$|C'| = |K - 2C|.$$

Mais les courbes K (particulières) qui sont découpées par les surfaces polaires de F jouissent de cette propriété remarquable : chacune d'elles est le lieu des points doubles des courbes d'un réseau de sections planes de F ; c'est, comme on dit, la courbe jacobienne du réseau.

Maintenant, si l'on donne sur F un système quelconque de courbes $|C|$, qui ne renferme plus les sections planes de la surface, on peut considérer d'une manière analogue les jacobiennes K des réseaux contenus dans $|C|$ (pourvu que la dimension de $|C|$ soit $\geqq 2$) ; on démontre que ces courbes K appartiennent à un même système linéaire complet, qui possède un point-base de l'ordre $3i-1$ en chaque point-base d'ordre i pour $|C|$. Par la soustraction de deux courbes C, on obtient ainsi les *courbes* C′ *adjointes* à $|C|$

$$|C'| = |K - 2C|.$$

D'après cette définition, il est très facile de reconnaître directement *la propriété fondamentale du système adjoint,* qui, dans le cas de deux systèmes $|C|$ et $|L|$ n'ayant aucun point-base sur F, est exprimée par la relation symbolique

$$|C' + L| = |C + L'|.$$

On sait que cette propriété renferme le caractère invariant des courbes *canoniques,* découpées sur la surface F par ses adjointes φ_{n-4} d'ordre $n-4$, en dehors des courbes *exceptionnelles ;* car (lorsque les φ_{n-4} existent, à savoir lorsque le genre géométrique $p_g > 0$) le système qu'elles découpent sur F est représenté par

$$|C' - C| = |L' - L| \quad (^2).$$

(¹) ENRIQUES, *loc. cit.,* nᵒˢ 13 et suiv.

(²) Tome II, page 142.

Mais *la propriété du système adjoint, que nous venons de rappeler, nous apprend davantage;* en effet, elle nous amène à définir toute une série de systèmes invariants, qui peuvent exister sur des surfaces de genre $p_g = 0$, et qui peuvent même être utiles dans l'étude des surfaces de genre $p_g > 0$ (surtout en ce qui touche aux premières valeurs du genre), quoique dans ce cas ils se réduisent aux systèmes multiples du système canonique ([1]). Les systèmes invariants, auxquels nous venons de faire allusion, sont les systèmes

$$|2C' - 2C| = |2L' - 2L|,$$
$$|3C' - 3C| = |3L' - 3L|,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ils jouissent tous également de la propriété d'invariance vis-à-vis des transformations birationnelles de la surface, pourvu qu'on en retranche (comme on le fait d'ordinaire) les courbes exceptionnelles qui en font partie. On leur donne les noms de système *bicanonique,* système *trois fois canonique,* etc. Le nombre des courbes bicanoniques indépendantes s'appelle *bigenre;* pareillement on peut envisager le *trigenre,* ....

Si l'on veut obtenir, par exemple, les courbes bicanoniques sur une surface F_n (d'ordre n), dans le cas le plus simple où elle est douée d'une courbe double et de points triples ([2]), il suffit de retrancher deux sections planes, du système qui est découpé sur F_n par les surfaces biadjointes Φ_{2n-6} d'ordre $2n-6$, passant doublement par la courbe double (puisque ce système est justement le double de celui qui est découpé par les surfaces adjointes φ_{n-3}); on obtient ainsi des surfaces Φ_{2n-8} biadjointes à F_n, qui découpent sur F_n les courbes bicanoniques.

Les sections des surfaces biadjointes d'ordre $2n-8$ (en dehors de leurs parties exceptionnelles) jouissent donc de la propriété d'invariance vis-à-vis des transformations birationnelles de F_n.

On trouve l'exposition de ces résultats à la page 146 et suivantes du texte (t. II), et l'on peut voir à la page 149 les premiers exemples qu'on a donnés de surfaces de genre $p_g = 0$, et de bigenre $P_2 > 0$.

D'autres exemples nombreux se présentent en étudiant certaines classes de surfaces $z^2 = f(x, y)$ ([3]).

([1]) C'est ainsi, par exemple, qu'on a pu donner une classification complète des surfaces de genre $p_g > 0$, et de genre linéaire $p^{(1)} = 2, 3$. — (*Cf.* ENRIQUES, *Rendiconti della R. Acc. d. Lincei,* 1897).

([2]) Tome I, pages 71 et suiv.

([3]) ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$ (*Rendic. della R. Accad. d. Lincei,* 1898).

L'importance des plurigenres ressortira de la seconde partie de cette Note, lorsqu'il s'agira d'établir si une surface donnée est rationnelle, ou si elle peut être transformée en un cylindre, etc. (*voir* p. 521).

Il résultera en particulier que, pour les surfaces qui ne se ramènent pas à la famille des cylindres, il y a toujours des plurigenres P_i qui ne s'annulent pas pour des valeurs assez grandes de i ($i = 4$ ou $i = 6$).

3. De la propriété fondamentale du système adjoint découlent encore les résultats concernant le *genre numérique* p_n ou p_a d'une surface, qui se trouvent largement développés dans le texte (t. II, p. 82-92, 125-129). Il nous suffira de rappeler que, lorsque $p_a < p_g$, la série (canonique) découpée sur la courbe générale d'un système irréductible $|C|$ de F par le système adjoint, n'est pas complète; cette série $g_{2\pi-2}^{\pi-1-\delta}$ a donc un défaut δ; mais *ce défaut, pour les différents systèmes de courbes tracés sur la surface, a un maximum qui est précisément* $p_g - p_a$ (¹).

Il y a une autre manière, en quelque sorte analogue, de définir le caractère invariant $p_g - p_a$.

Considérons, à cet effet, la série linéaire (*caractéristique*) qui est découpée sur la courbe générale de $|C|$ par les autres courbes du même système; c'est une série g_n^{r-1}, si l'on désigne par n, r, respectivement, le degré et la dimension de $|C|$. Eh bien! *la série caractéristique d'un système complet tracé sur une surface n'est pas complète (en général, au moins), lorsque* $p_a < p_g$; *mais, pour les différents systèmes existant sur* F, *le défaut de la série atteint un maximum qui est précisément* $p_g - p_a$ (²).

De ce théorème découle une relation importante entre les caractères d'un système linéaire $|C|$ donné sur une surface, dont les deux genres (géométrique et numérique) sont représentés par p_g, p_a. En désignant par n, π, r respectivement le degré, le genre et la dimension du système, et en supposant que celui-ci ne soit pas renfermé dans le système canonique, on a toujours

$$\pi - 1 - n + r \geqq p_a.$$

(¹) Page 128. D'après un théorème démontré tout dernièrement par M. Picard (t. II, p. 438), on a l'égalité $\delta = p_g - p_a$ pour tout système $|C|$ existant sur la surface. On n'est pas encore parvenu à retrouver ce théorème par les méthodes géométriques.

(²) CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali*... (*Annali di Matematica,* 2ᵉ série, t. XXV, 1897). Une démonstration très simple a été donnée par M. SEVERI (*Rendiconti della R. Acc. d. Lincei,* octobre 1903).



Lorsque le système $|C|$ est renfermé dans le système canonique, en désignant par i le nombre des surfaces adjointes φ_{n-4} indépendantes qui passent par une courbe C, on a, au lieu de la relation qui précède, la suivante

$$\pi - 1 - n + r \geqq p_a - i.$$

La relation, que nous venons d'écrire, constitue l'*extension* aux surfaces de la propriété relative aux courbes qu'on appelle le *théorème de Riemann-Roch*.

C'est M. Nöther qui a énoncé cette extension dans une Note publiée en 1886 [1]. Mais, dans le court essai de démonstration qu'il en a donné, il suppose que la série caractéristique d'un système complet soit toujours complète, ce qui est vrai seulement lorsque $p_a = p_g$. M. Enriques s'est occupé d'abord de justifier la formule en question dans le cas $p_a = p_g$; ensuite M. Castelnuovo est parvenu au résultat général pour tous les systèmes linéaires irréductibles de dimension $\geqq 2$, tracés sur une surface quelconque.

On a cherché ensuite à étendre ce théorème aux systèmes de courbes réductibles [2], et l'on est parvenu au résultat suivant, qui a été démontré d'une façon précise par M. Severi [3] : *si les caractères* π, n, i *d'une courbe, irréductible ou réductible, tracée sur une surface de genres* p_g, p_a, *satisfont à l'inégalité*

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geqq 0,$$

la courbe appartient à un système linéaire de dimension

$$r \geqq p_a + n - \pi + 1 - i.$$

4. Nous avons eu l'occasion de parler des surfaces (*irrégulières*), c'est-à-dire des surfaces pour lesquelles $p_a < p_g$.

Le premier exemple de telles surfaces est fourni par les surfaces réglées dont les sections planes ont le genre $\pi > 0$; en ce cas on a

$$p_g = 0, \qquad p_a = -\pi \quad (^4).$$

La classe des surfaces réglées ($\pi > 0$) est renfermée dans la classe plus générale des *surfaces possédant un faisceau irrationnel de*

---

(1) *Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, t. CIII.

(2) Castelnuovo et Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali...*, n° 4 (*Annali di Matematica*, 3e série, t. VI, 1901).

(3) *Sul teorema di Riemann-Roch* (*Atti dell' Accad. delle Scienze di Torino*, mai 1905).

(4) Tome I, p. 241 ; tome II, page 155.

courbes de genre quelconque; toutes ces surfaces sont irrégulières, parce que les séries caractéristiques des systèmes linéaires tracés sur elles ne sont pas complètes ([1]).

On a généralisé cet exemple, en démontrant que : *toute surface possédant un système de courbes qui n'est pas contenu* (totalement) *dans un système linéaire est une surface irrégulière* ([2]).

A cette famille de surfaces appartiennent tous les exemples de surfaces irrégulières auxquels on est parvenu par des procédés différents. Citons, par exemple, les surfaces qui représentent (point par couple) le système des couples de points appartenant à deux courbes algébriques distinctes ou à une même courbe, surfaces dont les caractères invariants ont été déterminés d'une façon complète ([3]).

Cette remarque a conduit à penser que toute surface irrégulière rentrerait dans la famille citée. C'est ce qu'on a démontré dernièrement ([4]). Ainsi donc, *sur toute surface irrégulière, on trouve des systèmes algébriques de courbes qui ne sont pas contenus dans des systèmes linéaires.*

Ce théorème peut être précisé davantage. Rappelons à cet effet que la notion de la série caractéristique d'un système linéaire de courbes sur une surface peut être étendue à un système continu non linéaire, de la façon suivante ([5]) : les courbes infiniment voisines d'une courbe générale du système découpent sur celle-ci une série, qu'on appellera *série caractéristique* du système donné. On a maintenant le théorème ([6]) : *tout système continu de courbes algébriques existant sur une surface est renfermé en un système* (*linéaire ou non linéaire*) *dont la série caractéristique est complète.*

Le dernier système sera linéaire, d'après un théorème de M. Castelnuovo (nº 3), si la surface est régulière ($p_g = p_a$). Au contraire, si $p_g > p_a$, il existe sur la surface des systèmes linéaires complets, de

---

([1]) CASTELNUOVO, *Alcuni risultati...*, nº 10 (*Mem. della Società italiana delle Scienze,* 1896).

([2]) ENRIQUES, *Una proprietà...* (*Rendic. del Circolo Matematico di Palermo,* t. XIII, 1899).

([3]) MARONI, *Atti dell' Accad. d. Scienze di Torino,* 1903. — SEVERI, *Ibidem,* et *Memorie dell' Accad. d. Scienze di Torino,* 1903. — DE FRANCHIS, *Rendic. del Circolo Matem. di Palermo,* 1903.

([4]) ENRIQUES, *Sullà proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (*Rendic. della R. Accad. d. Scienze di Bologna,* 1904); *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 16 janvier 1905.

([5]) SEVERI, *Osservazioni sui sistemi continui ...* (*Atti della R. Acc. d. Scienze di Torino,* 1904).

([6]) ENRIQUES, *loc. cit.*

genre π, degré n et dimension $r = p_a + n - \pi + 1$, dont la série caractéristique a le défaut maximum $p_g - p_a$; *ces systèmes sont donc renfermés en des systèmes continus de dimension*

$$\rho = p_g + n - \pi + 1,$$

composés par $\infty^{p_g - p_a}$ *systèmes linéaires complets de dimension*

$$r = \rho - (p_g - p_a).$$

Si l'on assujettit les courbes d'un tel système continu à satisfaire à r conditions linéaires, on obtient *une série* $\infty^{p_g - p_a}$ *de courbes non équivalentes,* série dont la courbe générale n'appartient à aucun système linéaire contenu dans la série. Mais on ne saurait pas construire sur la surface une série de dimension $p_g - p_a + 1$ douée de la même propriété.

Comment pourra-t-on reconnaître si une courbe ayant des caractères assignés, sur une surface de genres p_g, p_a, appartient à une desdites séries $\infty^{p_g - p_a}$? Voici la réponse : *il suffit que les caractères* π, n, i *de la courbe* (nommés au n° 3) *satisfassent à l'inégalité*

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geqq 0.$$

Ce résultat, auquel M. Enriques est arrivé en s'appuyant sur l'extension du théorème de Riemann-Roch, a reçu une démonstration directe assez simple de M. Severi [1].

5. Considérons sur une surface irrégulière un système continu S de courbes, composé par $\infty^{p_g - p_a}$ systèmes linéaires complets $|C|$, $|C_1|$, $|C_2|$, ... Si l'on construit le système linéaire

$$|C'| = |C + C_1 - C_2|,$$

on reconnaît de suite que $|C'|$ appartient aussi au système S, et possède les mêmes caractères que $|C|$, ...

On voit donc que l'*opération* $|C_1 - C_2|$ transforme tout système linéaire complet $|C|$ de S en un autre système linéaire complet $|C'|$, qui est aussi renfermé dans S. Or, on peut former $\infty^{p_g - p_a}$ opérations analogues, et l'on reconnaît aisément qu'elles forment un groupe continu de transformations deux à deux permutables. Il convient d'énon-

---

(1) *Sul teorema di Riemann-Roch* (*loc. cit.*).

cer ce résultat de la manière suivante [1] : *les* $\infty^{p_g-p_a}$ *systèmes linéaires complets renfermés dans un système continu peuvent être représentés par les points d'une variété algébrique à* $p_g - p_a$ *dimensions, qui admet un groupe permutable* $\infty^{p_g-p_a}$ *de transformations birationnelles en elle-même.*

C'est la *variété de Picard* attachée à la surface. D'après un théorème établi par ce savant [2], les coordonnées d'un point général de la variété peuvent être exprimées à l'aide de fonctions abéliennes $[2(p_g - p_a)$ fois périodiques$]$ de $p_g - p_a$ variables. En transportant cette propriété aux systèmes de courbes sur la surface considérée, on arrive à la conclusion [3] que *les* $p_g - p_a$ *paramètres non linéaires, dont dépend une courbe d'une série complète donnée sur la surface, peuvent être introduits de telle façon que les coefficients des équations de la courbe soient des fonctions abéliennes de ces paramètres.*

On a ainsi une extension aux surfaces de la propriété des groupes de points d'une courbe, qui est exprimée par le théorème d'inversion de Jacobi. On pourrait rechercher une autre extension de cette même propriété dans un sens plus direct; c'est ce qu'a fait M. Picard en parvenant à une réponse négative (*voir* la Note II de ce Traité).

6. En résumant les résultats rappelés dans les n°s 3, 4, 5, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si l'on envisage sur la surface une courbe, dont les caractères π, n, i *satisfont à l'inégalité*

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geqq 0;$$

cette courbe sera renfermée dans une série complète dépendant de

$$r \geqq p_g + n - \pi + 1 - i$$

paramètres; et ces paramètres seront de deux sortes : les uns, au nombre de $r - (p_g - p_a)$, *entrent linéairement, de sorte que la courbe est un système linéaire par rapport à ces paramètres; les autres paramètres, au nombre de* $p_g - p_a$, *entrent d'une façon irrationnelle, et précisément les coefficients des équations de la courbe sont des fonctions* $2(p_a - p_g)$ *fois périodiques de ces derniers paramètres.*

---

(1) CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici* ... (*Rendiconti della R. Acc. d. Lincei,* mai-juin 1905, ou bien *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 23 janvier 1905).

(2) PICARD, *Rendiconti del Circolo matem. di Palermo,* t. IX.

(3) CASTELNUOVO, *loc. cit.*



7. Il convient maintenant de rapprocher ces résultats, relatifs aux surfaces irrégulières, à d'autres résultats qui se rapportent aux surfaces douées d'intégrales de différentielles totales de première espèce.

M. Humbert, en appelant le premier l'attention des géomètres sur les systèmes non linéaires de courbes, a remarqué (¹) que *toute surface, sur laquelle existe un système de courbes qui n'est pas contenu dans un système linéaire, possède quelques intégrales de différentielles totales de première espèce.*

On a cherché à invertir ce résultat. M. Enriques y est parvenu d'abord (²) en ajoutant l'hypothèse que les $q > 0$ intégrales appartenant à la surface aient $2q$ périodes, hypothèse qui, à cette époque, devait être regardée comme restrictive. Ensuite M. Enriques, en s'appuyant sur un théorème important de M. Severi, que nous allons citer tout à l'heure (nº 8), et profitant du résultat qu'il a établi dernièrement sur les surfaces irrégulières (nº 4), a pu démontrer, sans introduire aucune restriction (³), que *toute surface possédant* $q > 0$ *intégrales de différentielles totales de première espèce possède des systèmes algébriques de courbes, qui ne sont pas contenus dans des systèmes linéaires.*

8. On n'a maintenant qu'à comparer les résultats des nºs 4 et 7 pour faire ressortir la vérité de la proposition suivante :

Les surfaces irrégulières et les surfaces douées d'intégrales simples de première espèce forment une seule famille.

Ce théorème renferme deux propositions réciproques dues respectivement à MM. Severi et Enriques. En vue de l'importance du résultat, il est bon peut-être de rappeler ici l'ordre dans lequel ces propositions ont été découvertes, et les étapes successives qui ont amené au résultat *quantitatif,* qui a permis de compléter le théorème énoncé.

En septembre 1904 M. Severi, en s'appuyant sur les résultats généraux de M. Picard, a examiné la courbe polaire d'une intégrale simple de seconde espèce (transcendante), et a remarqué que la série caractéristique, découpée sur cette courbe par les courbes qui appartiennent au même système linéaire, n'est pas complète; il en déduit que (⁴)

(¹) *Journal de Mathématiques,* 4ᵉ série, t. X, 1893, p. 190.

(²) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2ᵉ série, t. III.

(³) Enriques, *Rendic. della R. Accad. di Bologna,* décembre 1904.

(⁴) *Rendiconti della R. Accad. d. Lincei,* septembre 1904; *Mathem. Anna-*

toute surface douée d'intégrales simples de seconde (ou de première) espèce est irrégulière.

En décembre 1904 M. Enriques, en s'appuyant sur la construction de systèmes non linéaires sur une surface irrégulière (nº 4), parvenait à la conclusion réciproque que (¹) *les surfaces irrégulières possèdent des intégrales simples de première espèce.*

Ensuite M. Severi (²), en profitant du théorème de M. Enriques sur les systèmes non linéaires (nº 4), a pu démontrer l'égalité

$$r - q = p_g - p_a,$$

où r et q sont les nombres des intégrales simples de seconde et première espèce de la surface.

Enfin, une étude plus approfondie des systèmes non linéaires nommés, étude où le rôle essentiel est joué soit par la considération de la *variété de Picard* (³) (nº 5), soit par l'extension du théorème d'Abel (⁴) (dont nous allons parler au nº **10**), a permis à MM. Castelnuovo et Severi de préciser de la manière suivante le lien qui existe entre l'irrégularité d'une surface et le nombre des intégrales simples qui lui appartiennent :

Une surface ayant les genres p_g, p_a possède exactement $p_g - p_a$ intégrales simples distinctes de première espèce et $2(p_g - p_a)$ intégrales simples distinctes de seconde espèce; le nombre des périodes des unes et des autres intégrales, et le nombre des cycles linéaires distincts de la variété de Riemann à quatre dimensions attachée à la surface est $2(p_g - p_a)$.

Ce résultat est donc le fruit d'une longue série de recherches, auxquelles ont également contribué les méthodes transcendantes de M. Picard et les méthodes géométriques employées en Italie.

9. Le théorème d'après lequel une surface irrégulière possède des systèmes non linéaires de courbes (nº 4) peut être précisé davantage dans quelques cas particuliers remarquables.

---

len, t. LXI. Une autre démonstration a été donnée par M. PICARD (*Comptes rendus,* 16 janvier 1905; *voir* aussi ce *Traité,* t. II, p. 419).

(¹) *Rendiconti della Accad. d. Scienze di Bologna, loc. cit.*

(²) *Atti della R. Accad. d. Scienze di Torino,* janvier 1905; *voir* aussi PICARD, *loc. cit.*

(³) CASTELNUOVO, *Comptes rendus,* 23 janvier 1905; *Rendic. della R. Accad. dei Lincei,* mai-juin 1905.

(⁴) SEVERI, *Comptes rendus,* 3 avril 1905; *Annali di Matematica,* 3ᵉ série, t. XII.

En 1900, M. Castelnuovo communiquait à M. Enriques (¹) une construction d'après laquelle, étant donné sur une surface de genre $p_g = 0$ un système de courbes non équivalentes, on est amené à un faisceau irrationnel. En 1904 (au moyen du résultat du n° 4) M. Enriques en a déduit (²) que :

Toute surface de genres

$$p_g = 0, \qquad p_a < 0$$

renferme un faisceau irrationnel de courbes.

Ce résultat peut être généralisé, en remarquant que le point essentiel de la construction précédente, c'est le fait que les intégrales simples de la surface sont fonctions l'une de l'autre.

Or on reconnaît, en général (³), que, *si, parmi les intégrales simples attachées à une surface, il y en a plusieurs qui sont fonctions de l'une d'entre elles, alors la surface renferme un faisceau irrationnel de courbes.* Il s'ensuit que *toute surface ayant $p_g \geqq 2(p_a + 2)$ possède un faisceau irrationnel de courbes* (⁴). Cette propriété appartient donc à toute surface dont le genre arithmétique $p_a < -1$ (⁵); (on verra ensuite que les courbes du faisceau sur une telle surface sont rationnelles).

Le même ordre de considérations a permis à M. de Franchis d'établir un théorème remarquable (⁶) :

Si la surface $z^2 = f(x, y)$ possède q intégrales simples distinctes de première espèce, la courbe plane $f(x, y) = 0$ est formée par $2q + 2$ ou $2q + 1$ courbes appartenant à un même faisceau; toute courbe du faisceau est la projection de deux courbes de la surface qui varient en un faisceau hyperelliptique de genre q.

Le théorème réciproque subsiste aussi.

10. La démonstration très simple, par laquelle M. Severi a établi le théorème du n° **8**, s'appuie sur une proposition qui doit être regardée

---

(¹) *Annales de Toulouse*, 2ᵉ série, t. III.

(²) *Rendic. Accademia di Bologna, loc. cit.*

(³) De Franchis, *Rendic. della R. Accad. dei Lincei,* juin 1904; *Rendic. del Circolo matem. di Palermo,* t. XX, 1905, p. 49.

(⁴) Castelnuovo, *Rendic. del Circolo matem. di Palermo,* t. XX, p. 55.

(⁵) De Franchis, *Rendic. del Circolo matem. di Palermo; loc. cit.*

(⁶) De Franchis, *Rendic. della R. Accad. dei Lincei, loc. cit.; voir* aussi une extension de ce théorème dans les *Rendic. del Circolo matem. di Palermo,* t. XX, p. 331.

comme l'extension aux séries de courbes tracées sur une surface du théorème d'Abel relatif aux séries de groupes de points d'une courbe. Il s'agit de décider, en recourant aux intégrales simples de première espèce de la surface, si une série continue de courbes tracées sur elle est contenue dans un système linéaire. On peut énoncer la condition cherchée de différentes façons, mais on doit toujours envisager la somme des valeurs que chaque intégrale acquiert aux points d'un certain groupe variable. Bornons-nous à rappeler la première forme sous laquelle M. Severi énonce son théorème [1] :

Pour qu'une série algébrique de courbes sur une surface appartienne à un système linéaire, il est nécessaire et suffisant que la somme des valeurs que chaque intégrale simple de première espèce prend aux points d'intersection de deux courbes de la série, garde une valeur constante lorsque les deux courbes varient dans la série.

Une autre extension du théorème d'Abel a été donnée aussi par M. Severi dans le Mémoire cité. La voici. Supposons que deux surfaces F, F' soient liées par une correspondance algébrique $(1, n)$; on aura alors sur F' une *involution* d'ordre n, formée par ∞^2 groupes de n points correspondant aux points de F. Eh bien, *la condition pour que l'involution sur* F' (*c'est-à-dire la surface* F) *soit régulière, est que la somme des valeurs de chaque intégrale simple de première espèce de* F' *aux points d'un même groupe reste constante quand ce groupe varie.*

11. Aux systèmes algébriques de courbes tracées sur une surface s'étendent immédiatement les notions de système complet, d'addition et de soustraction de systèmes, que nous avons exposées lorsqu'il s'agissait de systèmes linéaires. Si l'on désigne par (C), (C_1), ... des systèmes algébriques complets, on pourra donc attribuer une signification précise à une relation telle que celle-ci :

$$h(C) = h_1(C_1) + h_2(C_2) + \ldots + h_\rho(C_\rho), \tag{1}$$

où les h, h_1, h_2, ... h_ρ sont des nombres entiers, dont le premier et quelqu'un des autres sont certainement positifs; on suppose naturellement que les soustractions relatives aux coefficients négatifs sont possibles. Si la relation (1) a lieu, on dira que les systèmes (C), (C_1), ..., (C_ρ) sont *algébriquement dépendants*. Or M. Severi est

---

[1] *Comptes rendus,* 3 avril 1905; *Annali di Matematica,* 3e sér., t. XII. On trouvera un résultat plus expressif dans une Note de M. SEVERI parue tout dernièrement dans les *Rendic. del Circolo matem. di Palermo,* t. XXI, 1906.

parvenu à démontrer un théorème extrêmement remarquable, qui se rapporte aux notions rappelées tout à l'heure [1] :

Sur une surface algébrique on peut toujours fixer un nombre fini ρ *de systèmes algébriques complets* (C_i), *algébriquement indépendants, tels que tout autre système algébrique* (C), *tracé sur la surface, dépende algébriquement des systèmes nommés.*

Tous lès systèmes (C) existant sur la surface sont donc fournis par la relation (1), en attribuant aux coefficients h des valeurs entières. On dit que les systèmes $(C_1), \ldots, (C_\rho)$ forment une *base* de la totalité des systèmes tracés sur la surface. Si celle-ci est régulière, la base est formée par des systèmes *linéaires.*

Le nombre ρ, qui entre dans le dernier théorème, ne diffère pas du nombre que M. Picard a désigné par la même lettre à la page 241 du Tome II de ce Traité, et qui joue un rôle important dans sa théorie des intégrales simples de troisième espèce. En effet, si l'on prend une courbe $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ de chacun des systèmes formant la base, il n'existe aucune intégrale simple de troisième espèce ayant ces seules courbes pour courbes logarithmiques; mais on peut former une intégrale qui a pour courbes logarithmiques les ρ courbes nommées et une courbe ultérieure C arbitrairement fixée.

La connexion existant entre la théorie de la *base* et celle des intégrales simples de troisième espèce permet à M. Severi de répondre à une question importante posée par M. Picard [2]. Il démontre en effet que *la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les intégrales simples attachées à une surface algébrique se réduisent à des combinaisons algébrico-logarithmiques, c'est que la surface soit régulière.*

12. Revenons maintenant à la recherche des caractères invariants d'une surface. A côté des invariants (absolus) que nous avons considérés jusqu'ici, il convient de prendre en considération de nouveaux caractères, qui ne jouissent pas d'une invariance rigoureuse vis-à-vis de toutes les transformations birationnelles de la surface; ce sont les *invariants relatifs.*

On parvient à cette conception très féconde, en partageant les transformations qu'on peut faire subir à une surface en deux classes :

1° Attribuons à la première classe les transformations qui font cor-

---

[1] *Comptes rendus de l'Acad. des Sc.,* 6 février 1905; un Mémoire plus détaillé sur ce sujet paraîtra prochainement dans les *Mathem. Annalen.*

[2] Ce Traité, t. II, p. 144.

respondre *sans exception* un point à chaque point simple de la surface donné, et une courbe à chaque courbe de celle-ci ([1]);

2° Attribuons, au contraire, à la seconde classe les transformations qui font correspondre à un ou à plusieurs points (en nombre fini) des courbes (exceptionnelles), ou *vice versa*.

Nous appelons alors *invariant relatif* de la surface tout caractère de celle-ci, qui est invariant vis-à-vis des transformations birationnelles de la première classe. Une transformation de la seconde classe modifie en général ce caractère, à moins que la transformation ne change autant de points de F en courbes exceptionnelles, que de courbes exceptionnelles de F sont transformées en points.

Voici maintenant quelques invariants relatifs fondamentaux qui appartiennent à une surface algébrique quelconque.

Partons d'abord d'une surface F_n d'ordre n, de genre $p_g > 0$. Une surface φ_{n-4}, d'ordre $n-4$, adjointe à F_n, coupe celle-ci (en dehors de sa courbe double) suivant une courbe composée par une courbe canonique et les courbes exceptionnelles qui peuvent exister sur F_n ([2]). Or, la première partie jouit de la propriété d'invariance (en une acception absolue); son genre $p^{(1)}$ constitue donc un invariant absolu de la surface, qu'on appelle, d'après M. Nöther, *le genre linéaire* ([3]).

Mais si, en ne faisant pas abstraction des courbes exceptionnelles, on évalue le genre de la courbe composée qui constitue (en dehors de la courbe double) l'entière intersection de F_n avec φ_{n-4}, on obtient un *nombre* ω *qui est un invariant relatif de la surface.*

Or le nombre ω peut être évalué en fonction des caractères d'un système linéaire quelconque tracé sur la surface F_n, et de ceux de son adjoint, soit, par exemple, en fonction du genre π des sections planes de F_n, de l'ordre n, et du genre π' des intersections de F_n avec les surfaces adjointes (φ_{n-3}) de l'ordre $n-3$; on a, en effet,

$$\omega = \pi' - 3(\pi - 1) + n.$$

L'importance de cette formule découle de la remarque suivante :

L'expression $\pi' - 3(\pi - 1) + n$ *a un sens, même dans le cas où la surface donnée a le genre* $p_g = 0$; *elle conserve d'ailleurs toujours son invariance relative,* vis-à-vis des transformations de la

([1]) Nous passons sur la difficulté inhérente aux points singuliers, dont il est permis d'ailleurs de faire abstraction.

([2]) Tome II, page 118.

([3]) Tome I, page 205.

première classe. Ce fait est une conséquence presque immédiate de la propriété fondamentale du système adjoint (¹).

Ou pourrait de même former avec le degré n' du système découpé sur F_n par les surfaces φ_{n-3} une expression qui jouit aussi d'une invariance relative, à savoir

$$n' - 4(\pi - 1) + n;$$

cette expression, lorsque $p_g > 0$ et que la surface F_n ne possède pas de courbes exceptionnelles, exprime le degré du système canonique. Mais on a toujours

$$n' - 4(\pi - 1) + n = \omega - 1,$$

ce qui donne une généralisation d'une formule bien connue de M. Nöther (²).

13. Un autre invariant relatif, qui va jouer un rôle important dans l'étude des surfaces appartenant à la classe des surfaces réglées, peut être obtenu, d'après MM. Zeuthen et Segré, de la manière suivante : prenons sur la surface F un faisceau linéaire de courbes C, de genre π, doué de n points-base (simples ou multiples); il y aura, en général, un certain nombre δ de courbes C douées d'un point double, en dehors des points-base; or l'expression

$$I = \delta - n - 4\pi$$

ne dépend pas du faisceau considéré, mais seulement de la surface F, dont elle constitue un invariant relatif (³).

14. Comparons maintenant les deux invariants relatifs ω et I, d'une surface F.

Lorsqu'on transforme F par une transformation birationnelle, qui fait correspondre une courbe exceptionnelle à un point de F, le nombre ω diminue d'une unité; au contraire I augmente d'une unité par la même transformation.

Il s'ensuit que l'expression $\omega + I$ ne change pas, c'est-à-dire qu'elle constitue un invariant absolu de F; on a d'ailleurs (d'après une formule de M. Nöther)

$$\omega + I = p_a + 9 \quad (⁴).$$

(¹) ENRIQUES, *Introduzione alla geometria sopra una superficie algebrica*, n° 41 (*Memorie della Società italiana delle Scienze*, 3e série, t. X, 1896).

(²) *Loc. cit.*

(³) *Cf.* CASTELNUOVO et ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali...*, *loc. cit.*, n° 6.

(⁴) CASTELNUOVO et ENRIQUES, *loc. cit.*

On trouvera dans le texte (page 412) un invariant relatif lié aux précédents et qui se rattache au nombre des cycles à *deux* dimensions d'une surface.

15. L'étude des invariants relatifs appartenant à une surface nous amène à considérer de plus près les courbes exceptionnelles.

Tous les géomètres qui se sont occupés des surfaces algébriques savent bien que la présence de ces courbes, qui peuvent se transformer en points, introduit dans la théorie une difficulté systématique. C'est, d'ailleurs, une difficulté propre aux surfaces, qui n'a rien d'analogue dans la théorie des courbes. Aussi plusieurs efforts ont été faits pour éliminer cette difficulté, autant que possible. Depuis son premier Mémoire (de 1893) l'un de nous (Enriques) avait prévu que toute surface F (quelques cas particuliers exceptés) aurait pu se transformer en une nouvelle surface F′ dénuée de courbes exceptionnelles; il est revenu ensuite sur le même sujet, en 1896.

Mais ces résultats partiels n'ont plus d'intérêt aujourd'hui, puisque la question vient d'être résolue heureusement d'une façon précise et complète.

On démontre, en effet, qu'étant donnée une surface F, on peut faire disparaître l'une après l'autre ses courbes exceptionnelles, par un procédé qui s'arrête nécessairement (en faisant disparaître toutes ces courbes), si la surface F ne possède aucun système linéaire de genre π quelconque et de degré $n > 2\pi - 2$. Mais si, au contraire, un tel système existe (ainsi que nous le dirons plus loin), la surface F peut être transformée en un plan ou en un cylindre, c'est-à-dire qu'elle appartient à la classe générale des surfaces réglées (rationnelles ou irrationnelles). On a donc le théorème [1] :

Toute surface F, *qui n'appartient pas à la classe des surfaces réglées, peut être transformée en une nouvelle surface* F′ *qui n'admet aucune courbe exceptionnelle, de sorte qu'à chaque point et à chaque courbe exceptionnelle de* F *corresponde sans exception un point sur* F′.

Par suite, en dehors de la classe des surfaces réglées, il ne peut y avoir sur une surface quelconque qu'un nombre fini de courbes exceptionnelles; au contraire, *il y en a un nombre infini sur les surfaces rationnelles et sur les réglées et leurs transformées.*

16. Si l'on transforme une surface F par deux transformations différentes, de façon à éliminer ses courbes exceptionnelles, on obtient

---

[1] Castelnuovo et Enriques, *loc. cit.*, n° 18.

deux surfaces F′, F″, qui se correspondent *point par point, sans exception*. En d'autres termes, toutes les correspondances birationnelles entre des surfaces qui n'ont pas de courbes exceptionnelles appartiennent à la première classe des transformations, au moyen desquelles nous avons introduit les invariants relatifs.

On voit maintenant comment on peut déduire un invariant absolu de chacun des invariants relatifs ω, I, que nous avons définis.

Soit F une surface douée d'un nombre fini e de courbes exceptionnelles, et soit F′ une surface transformée de F ne possédant aucune courbe exceptionnelle. Calculons, par exemple, l'invariant relatif ω par rapport à F, et formons l'expression

$$\omega + e.$$

Elle a la même valeur que l'invariant ω calculé par rapport à F′. Elle est donc un *invariant absolu* de F, qu'on appelle *genre linéaire* $p^{(1)}$ (¹), parce qu'elle se réduit au genre des courbes canoniques, lorsque le genre p_g de F est plus grand que zéro. On a d'ailleurs $p^{(1)} \geqq 1$.

Il est aisé de comprendre l'importance de la définition plus étendue du genre linéaire d'une surface que nous venons de donner. Il suffit de remarquer qu'en désignant par P_i le i-genre de la surface, on établit la formule

$$P_i \geqq p_a + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1) + 1,$$

et pour les surfaces régulières ($p_g = p_a = p$)

$$P_i = p + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1) + 1,$$

pourvu qur l'on ait $p^{(1)} > 1$ (²).

17. Dans la définition qui précède nous avons dû laisser de côté les surfaces rationnelles et les réglées ou leurs transformées. Car en ce cas on ne peut plus se reporter à une image convenable de la surface, dénuée de courbes exceptionnelles.

Mais on étend aisément à ces cas la définition du genre linéaire $p^{(1)}$, en *appelant* $p^{(1)}$ *le maximum que peut atteindre le caractère* ω pour une transformée quelconque de la surface (³).

(¹) Castelnuovo et Enriques, *loc. cit.*, n° 20.

(²) Pour $p^{(1)} = 1$ on peut construire des surfaces pour lesquelles $P_2 > p + 1$. — *Cf.* Enriques, *Rendic. della R. Accad. d. Lincei*, 1898.

(³) Castelnuovo et Enriques, *loc. cit.*, n° 21.

On trouve alors que dans la classe des surfaces rationnelles le maximum $p^{(1)}$ de ω est atteint par le plan ($p^{(1)} = 10$), et, dans la classe de surfaces représentables sur une réglée de genre p, le maximum est atteint par cette dernière surface $[p^{(1)} = -8(p-1)+1]$. On a ainsi une *définition tout à fait générale du genre linéaire*. L'évaluation de ce nombre dans les cas concrets se rattache à la question de reconnaître si une surface donnée peut être transformée en une réglée. Cette question sera résolue dans la seconde partie de cette Note.

SECONDE PARTIE.

---

18. La théorie générale des surfaces, dont nous venons de parler, montre sa fécondité lorsqu'on cherche à en appliquer les résultats à des classes particulières de surfaces. Parmi celles-ci, nous allons étudier maintenant les surfaces réglées, et celles qui admettent un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes.

Rappelons qu'une surface $f(x, y, z) = 0$ est dite *rationnelle* (ou *unicursale*), si l'on peut exprimer les coordonnées x, y, z de chacun de ses points par des fonctions rationnelles de deux paramètres u, v, de telle sorte que u, v s'expriment à leur tour rationnellement à l'aide de x, y, z.

La famille des surfaces rationnelles rentre comme cas particulier dans celle des *surfaces réglées* ou leurs *transformées;* pour ces surfaces $[f(x, y, z) = 0]$ les coordonnées d'un point sont des fonctions rationnelles d'un paramètre t, et de deux variables X, Y liées par une relation algébrique de la forme

$$\varphi(X, Y) = 0$$

(équation d'un cylindre).

Au point de vue algébrique, la détermination de la famille des surfaces réglées et, en particulier, des surfaces rationnelles, fournit la réponse au problème suivant :

Étant donnée une équation algébrique

$$f(x, y, z) = 0$$

entre trois inconnues, reconnaître si elle peut être transformée rationnellement de façon à éliminer une, ou, en particulier, deux inconnues.

Dans cette recherche, on peut se placer à deux points de vue :

a. On cherche d'abord à obtenir la transformation demandée, en construisant sur f certaines fonctions rationnelles de x, y, z par un procédé qui permet de décider toujours par un nombre fini d'opérations si la transformation est possible ou non. On arrive ainsi à établir une *détermination* des surfaces rationnelles et réglées *à l'aide de caractères qualitatifs.*

b. On cherche à établir les conditions d'existence de la transformation demandée, en évaluant les caractères invariants de la surface. On arrive ainsi à une *détermination* des surfaces rationnelles et réglées *à l'aide de caractères quantitatifs.*

19. Examinons d'abord un cas particulier. Supposons que l'équation de la surface ait la forme $z^2 = f(x, y)$.

Nous allons expliquer en quel sens on est parvenu à résoudre en ce cas la question proposée, soit en se plaçant au point de vue *a*, soit au point de vue *b*.

Il s'agit de chercher les conditions auxquelles doit satisfaire la courbe plane $f = 0$ pour que la surface $z^2 = f(x, y)$ soit rationnelle; on donne à cette surface le nom de *plan double* qui a la *courbe limite* $f = 0$.

Clebsch a posé ce problème et en a examiné un cas; M. Nöther, en reprenant la question, dans toute sa généralité, est parvenu au résultat suivant :

Pour que la surface $z^2 = f(x, y)$ soit rationnelle, il faut et il suffit que la courbe f puisse se ramener, par une transformation birationnelle du plan x, y, à l'un des types suivants :

1° *Courbe d'ordre $2n$ quelconque douée d'un point multiple d'ordre $2n - 2$;*

2° *Courbe générale du quatrième ordre;*

3° *Courbe du sixième ordre douée de deux points triples infiniment voisins.*

On peut, d'ailleurs, décider *a priori* si une courbe donnée f peut être transformée en un des types nommés.

Supposons que l'ordre de la courbe f et les multiplicités de ses points singuliers distincts soient des nombres pairs $2n$, $2i_1$, $2i_2$, ...;

on peut toujours satisfaire à ces conditions en recourant, s'il est nécessaire, à une transformation birationnelle préalable de la courbe f.

Appelons maintenant courbe adjointe d'indice $k (= 1, 2, \ldots)$ à la courbe f une courbe d'ordre $2n - 3k$ assujettie à passer avec $2i - k$ branches par tout point $2i^{\text{ple}}$ de f. On reconnaît alors que, si la courbe f peut se ramener à l'un des types de Clebsch-Nöther, elle ne possède aucune courbe adjointe dont l'indice soit $\geqq 2$, et *vice versa;* donc, *la non-existence des courbes adjointes d'indices* 2, 3, ... *à la courbe f est la condition pour que la surface* $z^2 = f(x, y)$ *soit rationnelle, ou puisse être transformée birationnellement en une surface réglée* (¹). La seconde éventualité regarde certains cas de réduction de la courbe f, précisément le cas où la courbe f se compose d'un certain nombre de courbes rationnelles appartenant à un même faisceau.

Au moyen des relations qui existent entre les courbes canoniques, bicanoniques, ... d'une surface $z^2 = f(x, y)$ et les courbes adjointes des différents indices à la courbe f, on peut transformer ce résultat en le suivant, plus expressif que le théorème de Clebsch-Nöther :

Une surface $z^2 = f(x, y)$, *dont le genre géométrique* p_g, *le bigenre* P_2, *le trigenre* P_3, ... *sont nuls, est rationnelle ou peut être transformée en une surface réglée* (²).

D'après la condition qualitative qui précède, il suffit même de vérifier que

$$p_g = P_2 = \ldots = P_\nu = 0,$$

où ν est le plus grand entier $\leqq \frac{2n}{3}$, n étant l'ordre de f, et l'on en déduit $P_{\nu+1} = 0$, ...

Mais des conditions plus expressives découlent du nº **26**. Il est à souhaiter qu'on y parvienne d'une façon élémentaire, en développant l'analyse des courbes adjointes d'ordre k sur le plan.

20. Ces théorèmes nous amènent à quelques applications remarquables en elles-mêmes, et qui constitueront le point de départ de l'analyse générale que nous nous proposons d'établir.

Supposons qu'une surface f possède un système linéaire ∞^1 de courbes rationnelles. On peut d'abord, d'après M. Nöther, transformer birationnellement la surface en une autre f' possédant un système ∞^1

(¹) CASTELNUOVO et ENRIQUES, *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi* (*Rendic. del Circolo matem. di Palermo*, t. XIV, 1900).
(²) *Loc. cit.*



de coniques, découpées par les plans passant par une droite, qui aura la multiplicité $n-2$ si la surface f a l'ordre n. Or, cette surface f', à l'aide d'une projection effectuée d'un point de la droite nommée, se représente sur un plan double, dont la courbe limite a un certain ordre $2m$ et possède un point multiple d'ordre $2m-2$.

Il résulte, d'après le théorème de Clebsch-Nöther, que la surface f' et, en conséquence, la surface f, est rationnelle; d'où le théorème de M. Nöther :

Une surface qui possède un système linéaire ∞^1 de courbes rationnelles est rationnelle (¹).

Supposons, en second lieu, qu'une surface possède un système linéaire ∞^1 de courbes elliptiques, système ayant (au moins) un point-base simple. L'existence de ce système fait voir d'abord que la surface a le genre géométrique p_g et les plurigenres $P_2, P_3, \ldots$ nuls; elle permet en outre de représenter la surface sur un plan double, en représentant, sur les points d'une droite variable d'un faisceau, les couples de points de la série g_2^1, qui appartient à l'une des ∞^1 courbes elliptiques et qui possède un point double au point-base nommé. En recourant au dernier théorème du n° 19, on a donc :

Une surface qui possède un système linéaire ∞^1 de courbes elliptiques ayant (au moins) un point-base simple, est rationnelle ou peut être transformée birationnellement en une surface réglée, qu'on voit d'ailleurs être elliptique (²).

Enfin, d'une manière analogue, on démontre qu'une surface contenant un système linéaire ∞^1 de courbes hyperelliptiques de genre π quelconque, système ayant des points-base dont les multiplicités donnent une somme supérieure à $2\pi-2$, est rationnelle ou peut être représentée sur une surface réglée (³).

De ces théorèmes résultent des propositions, dont le lecteur verra de suite l'importance, quoiqu'elles soient moins expressives que les théorèmes primitifs.

Une surface dont les sections planes sont des courbes rationnelles est elle-même rationnelle.

(¹) M. Nöther (*Math. Annalen,* t. III) y parvient d'une manière directe, en construisant sur la F' une courbe qui rencontre en un seul point chacune des ∞^1 coniques. *Voir* aussi page 272 de ce Traité (en note).

(²) Castelnuovo et Enriques, *Sulle condizioni di razionalità..., loc. cit.*

(³) *Loc. cit.*



Une surface dont les sections planes sont des courbes elliptiques est rationnelle ou réglée (¹).

Une surface dont les sections planes sont des courbes hyperelliptiques de genre quelconque est rationnelle ou réglée (²).

On peut voir une démonstration du premier théorème à la page 59 du Tome II. Aux deux autres nous étions déjà parvenus par des procédés directs, tout à fait différents, avant d'avoir démontré les propositions générales d'où nous venons de les déduire.

21. A côté des résultats précédents, on peut placer d'autres théorèmes, en quelque sorte analogues, où, étant donnés sur une surface des systèmes particuliers de courbes, on conclut que la surface peut être transformée en une réglée.

Une surface réglée, ou une surface qui peut être transformée birationnellement en celle-ci, contient un faisceau de courbes rationnelles, c'est-à-dire une série ∞^1 telle que par tout point de la surface passe uue seule courbe de la série. Inversement, pourra-t-on affirmer que toute surface contenant un faisceau de courbes rationnelles peut être transformée en une surface réglée? M. Nöther (³) a abordé cette question; il a démontré qu'on peut, par une transformation préalable, changer la surface en une autre contenant un faisceau de droites ou de coniques. Dans le premier cas la question est tranchée; dans le second il s'agit encore de chercher si l'on peut tracer sur la surface une courbe qui découpe chaque conique en un seul point. Or l'existence d'une telle courbe a été démontrée par M. Nöther dans l'hypothèse que le faisceau soit rationnel, ainsi que nous l'avons dit au n° **20**; et dans l'hypothèse d'un faisceau quelconque la démonstration a été donnée par l'un de nous.

On a donc le théorème :

Toute surface contenant un faisceau de courbes rationnelles peut être transformée birationnellement en une surface réglée (⁴).

Une autre propriété de toute surface réglée c'est qu'on peut construire sur elle des systèmes linéaires de courbes (coupant en un

(¹) Castelnuovo, *Rendic. della R. Accad. d. Lincei,* 1894.

(²) Enriques, *Rendic. della R. Accad. d. Lincei,* 1893; *Mathem. Annalen,* t. XLVI.

(³) *Math. Ann.*, t. III.

(⁴) Enriques, *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali* (*Math. Ann.,* t. LII).



seul point chaque génératrice), ayant le même genre et les dimensions aussi grandes que l'on veut. Or cette propriété caractérise entièrement la famille des surfaces réglées et de leurs transformées.

Plus précisément : *une surface contenant un système linéaire de courbes de genre $\pi > 2$ et dimension $r \geqq 3\pi - 5$, peut être transformée en une surface réglée rationnelle ou irrationnelle* (pour $\pi = 1, 2$, *voir* le n° 20) (1).

En effet, si l'on impose aux courbes du système les $3(\pi - 2)$ conditions de passer doublement par $\pi - 2$ points arbitraires de la surface, on obtient ou bien un système linéaire de courbes de genre 2, auquel on appliquera un théorème du n° 20, ou bien un système de courbes réductibles auquel on peut appliquer le théorème énoncé ci-dessus.

22. Nous supposons maintenant qu'une surface $f(x, y, z) = 0$ soit donnée sans aucune restriction *a priori*; nous ne connaissons, par conséquent, sur celle-ci aucun système remarquable de courbes. Nous allons développer un procédé général, d'après lequel il sera toujours possible de reconnaître si la surface f appartient à la famille des surfaces rationnelles et réglées.

Envisageons le système linéaire $|C|$ constitué par les sections planes de la surface f.

Construisons le système $|C'|$ adjoint à $|C|$, puis le système $|C''|$ adjoint à $|C'|$, et ainsi de suite. On parvient ainsi à une série de systèmes adjoints successifs, $|C|$, $|C'|$, $|C''|$, ... Deux cas peuvent se réaliser. Ou bien la série a un nombre infini de termes; ou bien elle s'arrête après un nombre fini d'opérations, parce qu'on arrive à un système $|C^i|$ qui ne possède aucun système adjoint. Cette distinction est essentielle, car elle ne dépend pas des transformations birationnelles qu'on peut appliquer à la surface f. D'une manière précise, si l'on transforme birationnellement la surface f en une nouvelle surface f_1, et si l'on construit les systèmes adjoints successifs en partant du système des sections planes $|C_1|$ de f_1, on parvient à une nouvelle série, qui sera infinie ou finie, selon que le premier ou le second cas se présente pour la série relative à f(2). On est donc porté à répartir les surfaces en deux familles, l'une composée des surfaces sur lesquelles le pro-

(1) Cf. Enriques, *Sulla massima dimensione...* (*Atti dell' Accad. delle Scienze di Torino,* 1894).

(2) Castelnuovo et Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali...*, *loc. cit.*, n° 12.

cédé d'adjonction peut se poursuivre à l'infini, l'autre des surfaces sur lesquelles ledit procédé a un terme après un nombre fini d'opérations. A la première famille appartient, par exemple, toute surface d'ordre > 3 n'ayant aucun point singulier, ou, d'une manière générale, toute surface dont le genre géométrique ou le bigenre... est supérieur à zéro.

La seconde famille comprend les surfaces rationnelles et les surfaces représentables birationnellement sur les surfaces réglées; elle ne comprend pas d'autres surfaces en dehors de celles-ci, et c'est là un résultat essentiel de la théorie, que nous nous proposons de résumer.

Il y a lieu de faire de suite la remarque suivante : une surface qui renferme un système $|C|$ au moins de courbes de genre π quelconque, dont le degré est $n > 2\pi - 2$, appartient à la seconde famille; en effet les courbes adjointes successives C', C'', ... rencontrent la C en des groupes composés d'un nombre décroissant de points. *Vice versa,* sur toute surface de la seconde famille on peut construire un système tel que $|C|$; il suffit de prendre, dans la série des systèmes adjoints successifs à un système quelconque, un terme assez éloigné de celui-ci.

Une surface f de la seconde famille a, d'après ce qui précède, $p_g = 0$ et, par conséquent, $p_a \leqq 0$; posons $p_a = -p$ $(p \geqq 0)$. Nous allons fixer notre attention sur le dernier système $|C^i|$, de dimension $r_i \geqq 1$, qu'on rencontre en parcourant une série de systèmes adjoints successifs, par exemple la série qu'on obtient en partant des sections planes de f. On voit de suite que ce système a le genre $\pi_i \leqq p + 1$. Mais un examen plus approfondi, où le théorème de Riemann-Roch (n° 3) et l'invariant I de Zeuthen-Segre vont jouer un rôle essentiel, permet d'établir que la dimension du système $|C^i|$ est $r_i \geqq 3\pi_i - 5$, si le système est irréductible. Si, au contraire, $|C^i|$ est réductible, les composantes irréductibles des courbes C^i, ou bien forment un système linéaire satisfaisant à l'inégalité qui précède, ou bien sont des courbes rationnelles qui appartiennent à un faisceau de genre p. Si l'on se reporte maintenant aux résultats des n°s 20, 21, on parvient à établir le théorème fondamental suivant :

Toute surface, sur laquelle le procédé d'adjonction s'épuise par un nombre fini d'opérations, peut être transformée birationnellement en une surface réglée rationnelle $(p_a = 0)$ *ou irrationnelle* $(p_a < 0)$ [1].

Le problème de reconnaître si une surface appartient à la famille

---

[1] CASTELNUOVO et ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali..., loc. cit.*, n° 15.

des surfaces rationnelles et réglées, se trouve résolu par le théorème énoncé, au point de vue qualitatif (a) du n° **18**.

Ce théorème conduit à des conséquences remarquables; parmi celles-ci, quelques-unes avaient été déjà établies avant de posséder le théorème cité, par une application plus limitée du même procédé d'adjonction, qui a joué le rôle essentiel dans la démonstration rappelée ci-dessus.

D'abord nous sommes maintenant en mesure de donner plus de précision aux résultats du n° **21**.

Il suffit, en effet, de rappeler la remarque du n° **13**, pour qu'on puisse énoncer le théorème suivant :

Toute surface qui renferme un système au moins ∞^1 *de courbes de genre* π *quelconque et de degré* $n > 2\pi - 2$, *peut être transformée en une surface réglée rationnelle* ($p_a = 0$) *ou irrationnelle* ($p_a < 0$) : *on peut même supposer le système* ∞^0, *si* $\pi > 0$.

Ce théorème renferme les cas particuliers concernant les surfaces dont les sections planes ont le genre $\pi = 0, 1, 2$, que nous avons cités au n° **20**.

En faisant $\pi = 3$, on obtient déjà un résultat nouveau, à savoir : *les surfaces d'ordre* > 4, *dont les sections planes ont le genre* 3, *sont rationnelles, ou peuvent être transformées en une surface réglée de genre* $p \leqq 3$.

23. Voici maintenant une conséquence remarquable du dernier théorème, qui regarde la définition même d'une surface rationnelle.

Supposons que les coordonnées d'un point variable sur une surface s'expriment par des fonctions rationnelles de deux paramètres

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v); \tag{1}$$

la surface est certainement rationnelle si l'on peut résoudre les (1) en exprimant u, v par des fonctions rationnelles de x, y, z. Mais il n'en est pas toujours ainsi. Il peut se faire qu'à tout point (x, y, z) de la surface correspondent $n > 1$ points (u, v) d'un plan; dans ce cas la surface se représente sur une *involution plane de* ∞^2 *groupes de* n *points*. Est-ce que la surface sera encore rationnelle? Il s'agit de voir si l'on peut remplacer u, v par deux nouveaux paramètres u', v' (fonctions rationnelles de u, v), tels que x, y, z s'expriment rationnellement par u', v', et u', v' s'expriment à leur tour rationnellement par x, y, z.

Remarquons, à cet effet, qu'aux droites du plan (u, v) correspon-

dent sur la surface des courbes C, d'un certain genre π, appartenant à un même système complet.

Or on démontre : 1° que ce système a la série caractéristique complète; 2° que le degré du système est $n > 2\pi - 2$, ce qui permet d'appliquer le théorème du n° 22. On conclut donc que : *une surface, dont les coordonnées d'un point variable s'expriment par des fonctions rationnelles de deux paramètres, est rationnelle* [1].

Il y a lieu de généraliser ce résultat de la façon suivante :

Supposons que les coordonnées x, y, z du point général d'une surface f s'expriment par des fonctions rationnelles des coordonnées X, Y, t d'un point variable sur une surface réglée (cylindre) φ

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x(X, Y, t), \quad y = y(X, Y, t), \quad z = z(X, Y, t), \\ \varphi(X, Y) = 0. \end{cases}$$

A tout point de f correspondent, au moyen des relations (1), $n \geqq 1$ points de φ, formant un groupe d'une involution ∞^2 sur la surface réglée. Inversement à tout point de φ correspond un point de f; et si le premier point parcourt une droite $X = h$, $Y = k$ [où $\varphi(h, k) = 0$], le second point parcourt une courbe rationnelle de f. La surface f contient donc ∞^1 courbes rationnelles formant une série algébrique. Or, si par tout point de f passe une seule courbe de la série, la surface f est représentable birationnellement sur une surface réglée (n° 21). Dans le cas contraire, on démontre que les ∞^1 courbes rationnelles appartiennent à un même système linéaire, dont les courbes générales ont un certain genre π et se rencontrent deux à deux en $n > 2\pi - 2$ points variables; on conclut (n° 22) que la surface f est rationnelle, puisque l'éventualité qu'elle puisse être transformée en une surface réglée irrationnelle doit être exclue par la présence de ∞^1 courbes rationnelles ne formant pas un faisceau. On parvient ainsi au théorème :

Si les coordonnées d'un point variable sur une surface sont des fonctions rationnelles des coordonnées d'un point d'une surface réglée, la première surface elle-même peut être ramenée à une réglée (rationnelle ou irrationnelle) par une transformation birationnelle.

Ou bien :

Les groupes d'une involution quelconque située sur une surface

---

(1) CASTELNUOVO, *Sulla razionalità delle involuzioni piane* (*Mathem. Annalen*, t. XLIV).

réglée peuvent être représentés birationnellement sur les points d'un plan ou d'une nouvelle surface réglée (¹).

On peut exprimer le même résultat sous une autre forme, en disant que :

Une surface possédant une série algébrique (au moins ∞^1) *de courbes rationnelles, peut être transformée birationnellement en une surface réglée, si la série est un faisceau, ou bien elle est rationnelle.*

Une autre conséquence du théorème du n° **22** a été déjà énoncée au sujet des courbes exceptionnelles (n° **10**).

En effet, dès qu'on a démontré qu'une surface, qui ne renferme aucun système de genre π et de degré $n > 2\pi - 2$, possède un nombre fini de courbes exceptionnelles, on conclut que toute surface possédant un nombre infini de telles courbes peut être transformée en une surface réglée (rationnelle ou irrationnelle) (²).

24. Nous nous plaçons maintenant au point de vue (b) du n° **18**, en cherchant à déterminer la famille des surfaces rationnelles et réglées par les valeurs de leurs caractères invariants.

Il y a lieu dans cette recherche de recourir à des méthodes différentes, suivant que la surface est régulière ou irrégulière (surfaces rationnelles et surfaces irrationnelles).

Soit d'abord une surface régulière de genre $p_g = p_a = 0$. A partir de ses sections planes C, nous construisons les systèmes adjoints successifs

$$|C'|, \quad |C''|, \quad \ldots.$$

Puisque l'on a $p_g = 0$, le système $|C'|$ ne contient pas $|C|$; mais il peut se faire que $|C''|$ renferme $|C|$; dans ce cas le bigenre $P_2 \geqq 1$, et la surface n'est certainement pas rationnelle. Supposons au contraire $P_2 = 0$; en examinant alors la série des points que $|C''|$ découpe sur une courbe C, on trouve une inégalité arithmétique entre les genres de trois systèmes adjoints successifs, d'où il résulte que les genres $\pi, \pi', \pi'', \ldots$ des systèmes adjoints forment, à partir d'un certain terme, une série décroissante, qui a nécessairement un nombre fini de termes. On en déduit le théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit ra-

(¹) Castelnuovo et Enriques, *loc. cit.*, n° 17.
(²) Castelnuovo et Enriques, *loc. cit.*, n° 18.

tionnelle est que le genre arithmétique et le bigenre soient nuls (¹). (La relation $p_g = 0$ résulte de $P_2 = 0$).

On a donc le moyen de caractériser la classe des surfaces rationnelles par les valeurs particulières que prennent certains invariants, en un sens analogue à celui qui permet de caractériser les courbes rationnelles par la valeur du genre $p = 0$. Toutefois, le résultat établi pour les courbes ne s'étend pas aux surfaces de la manière qu'on pourrait supposer, car on peut donner des exemples de surfaces ayant $p_g = p_a = 0$ et $P_2 > 0$, qui ne sont pas, en conséquence, rationnelles. Le lecteur pourra les trouver à la page 148 et suivantes du tome II.

25. Avant de passer au cas $p_a < 0$, nous nous arrêterons un moment sur la remarque suivante.

Au sujet des surfaces rationnelles il convient de faire la distinction qui suit.

Soit $f(x, y, z) = 0$ une surface rationnelle; on pourra donc exprimer x, y, z par des fonctions rationnelles invertibles de deux paramètres u, v. Mais il arrivera généralement que, dans les coefficients de ces fonctions, entreront des *irrationalités arithmétiques*. A ce point de vue on est porté à établir, parmi les surfaces rationnelles, une classification ultérieure d'après la nature de ces irrationalités. On y parvient en s'appuyant encore sur le procédé d'adjonction, car il suffit d'examiner le dernier système adjoint (au moins ∞^2) qu'on obtient en partant des sections planes de la surface.

On est porté ainsi à distinguer des *types de surfaces rationnelles, dont la représentation sur un plan dépend respectivement de racines carrées ou cubiques, et des irrationalités définies par une des équations que l'on rencontre dans la bissection des fonctions hyperelliptiques de genre* $p = 1, 2, 3\ldots$ *ou des fonctions abéliennes du genre* 3 *ou* 4 (²).

26. Soit maintenant une surface irrégulière de genres $p_g = 0$, $p_a < 0$. A partir des sections planes C, construisons la série des systèmes adjoints successifs

$$|C'|, \quad |C''|, \quad \ldots.$$

Cette série ne s'arrête pas si l'on a, pour quelques valeurs de i,

$$P_i > 0;$$

(¹) Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero, loc. cit.*

(²) Enriques, *Sulle irrazionalità*... (*Mathem. Annalen*, t. XLIX).



c'est ce qui arrive certainement si la surface f a un nombre fini de courbes exceptionnelles, lorsque

$$p^{(1)} > 1.$$

Mais on ne peut pas être assuré directement de la non-existence d'une surface n'appartenant pas à la famille des réglées et ayant, par conséquent, un nombre fini de courbes exceptionnelles, pour laquelle

$$p_g = P_2 = P_3 = \ldots = 0, \qquad p^{(1)} = 1.$$

Ainsi le critérium qualitatif établi au nº 22 ne fournit pas une détermination de la famille des surfaces réglées ($p_a < 0$) à l'aide de caractères invariants.

Un tel critérium serait fourni, il est vrai, dans le cas $p_a < -1$, par l'inégalité

$$p^{(1)} < 1,$$

mais le calcul du genre linéaire défini au nº **17**, de façon à comprendre le cas des surfaces réglées, exige d'établir le maximum d'une certaine expression formée avec les caractères des systèmes linéaires appartenant à la surface, et amène, en pratique, à effectuer les mêmes opérations que l'on doit effectuer d'après le nº 22.

Il convient donc de traiter la question proposée par une autre méthode, en prenant comme point de départ la propriété caractéristique des surfaces irrégulières (nº 4), d'après laquelle on sait, en particulier (nº 9), qu'une surface de genres $p_g = 0$, $p_a < 0$, renferme un faisceau irrationnel de courbes K.

Il y a lieu de distinguer deux cas :

I. $$p_a < -1.$$

En ce cas, il suffit d'évaluer l'invariant de Zeuthen-Segre à l'aide du faisceau des courbes K, en tenant compte de l'irrationalité de celui-ci [1]; on en déduit que le genre des K est 0 et, par suite (nº **21**), que la surface peut être ramenée à une réglée [2].

Donc : *Toute surface de genres* $p_g = 0$, $p_a < -1$ *peut être transformée en une réglée.*

II. $$p_a = -1.$$

Ce cas est beaucoup plus difficile.

---

[1] Castelnuovo et Enriques, *loc. cit.*, nº 6, *Oss.*

[2] Enriques, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* (*Rendic. del Circolo Matem. di Palermo,* t. XX, 5 marzo).

En supposant que les K aient le genre $\pi > 0$, on peut envisager sur la surface la série non linéaire des courbes K″, secondes adjointes aux courbes K.

L'examen de certaines courbes K″, qui se décomposent en une courbe K et en une courbe résiduelle elliptique, conduit à construire sur la surface un *faisceau rationnel de courbes elliptiques,* qui découpent les K en $n > 1$ points. On remarquera que ce second faisceau existe même lorsque $\pi = 0$, car alors la surface se ramène à une réglée elliptique : seulement on peut avoir ici $n = 1$.

Maintenant on peut représenter les surfaces de genres $p_g = 0$, $p_a = -1$, sur des *cylindres elliptiques multiples,* de façon qu'à un point du cylindre correspondent n points de la surface.

Par l'étude de cette correspondance *la construction de toutes les surfaces de genres $p_g = 0$, $p_a = -1$ se trouve ramenée à une transformation de déterminant d'ordre n des fonctions elliptiques.*

Dans le cas où n est un nombre premier, on peut transformer birationnellement la surface en une surface

$$\varphi(X, Y, Z) = 0,$$

où X, Y, Z s'expriment à l'aide de deux paramètres u, v par des formules de la forme suivante :

$$Z = v, \qquad Y = p'(u \mid \omega, \omega'),$$

$$X = \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \varepsilon^{\lambda} p_{\nu}(u + \lambda\omega_{\nu}) \right\} \sqrt[n]{(z-a_1)^{h_1}\dots(z-a_t)^{h_t}},$$

$$h_i < n, \qquad \sum h_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, n), \qquad \nu = \infty, \quad 0, \quad 1, \quad \dots, \quad n-1;$$

$$\varepsilon^n = 1, \qquad \varepsilon \neq 1,$$

$$p_{\nu}(u) = p(u \mid n\omega, \omega'), \qquad \omega_{\nu} = \omega \qquad \text{pour} \qquad \nu = \infty,$$

$$p_{\nu}(u) = p(u \mid \omega - \nu\omega', \omega'), \qquad \omega_{\nu} = \omega' \qquad \text{pour} \qquad \nu = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Si l'on envisage maintenant les plurigenres des surfaces que nous venons de construire, on trouve que

$$P_4 > 0, \qquad \text{ou} \qquad P_6 > 0,$$

ou bien

$$P_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots),$$

ce dernier cas correspondant à l'hypothèse $\pi = 0$ et conduisant par conséquent aux réglées elliptiques.

En rapprochant ce résultat du précédent ($p_a < -1$) et de celui du n° 24 concernant le cas $p_a = 0$, on obtient enfin le théorème général suivant [1] :

Les conditions pour qu'une surface puisse être transformée birationnellement en une réglée (rationnelle ou irrationnelle) peuvent être exprimées en annulant les deux genres d'ordre 4, 6 :

$$P_4 = P_6 = 0.$$

Il convient de remarquer que ces conditions ne peuvent être simplifiées ultérieurement, car il y a effectivement des surfaces pour lesquelles

$$p_g = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = 0, \qquad P_6 = 1,\ 2,\ (p_a = -1),$$

et d'autres pour lesquelles

$$p_g = P_2 = P_3 = P_5 = P_6 = 0, \qquad P_4 = 1, \qquad (p_a = -1),$$

27. Il y a lieu seulement d'ajouter quelques remarques au sujet du cas particulier

$$p_a < -1.$$

Nous avons vu que toute surface de genres

$$p_g = 0, \qquad p_a < -1$$

peut être ramenée à une réglée.

Or si, dans la discussion qui précède, on introduit le théorème du n° 9 sous sa forme la plus expressive, on réussit à simplifier le résultat en montrant que la condition $p_g = 0$ est superflue. MM. Castelnuovo [2] et Enriques [3] ont fait en même temps cette remarque, d'après laquelle il résulte que :

Toute surface de genre numérique $p_a < -1$ peut être ramenée à une réglée.

Ces conditions peuvent aisément être exprimées d'une façon transcendante. En effet, d'après le n° 8, on voit qu'*il s'agit de reconnaître que la surface possède $p > 1$ intégrales simples de première espèce*

---

(1) Enriques, *loc. cit.*

(2) Castelnuovo, *Rendic. del Circolo Matem. di Palermo,* t. XX, p. 55.

(3) Enriques, *ibid.,* t. XX, p. 61.

et qu'elle ne possède aucune intégrale double de première espèce ($p_g = 0$).

Sous cette forme (avec la restriction superflue que les p intégrales simples aient $2p$ périodes), les conditions énoncées avaient été trouvées antérieurement, c'est-à-dire en 1900 ([1]).

28. Le problème général de déterminer les surfaces qui admettent une infinité continue de transformations birationnelles en elles-mêmes a été posé par M. Picard en 1885.

Il y a lieu d'abord de distinguer deux cas, suivant que les transformations données engendrent un *groupe* d'ordre fini (au sens de Lie), ou qu'elles engendrent par multiplication une série de transformations dépendant d'un nombre infini de paramètres.

L'analyse de M. Picard se rapporte au premier cas. Elle aboutit aux résultats suivants :

Les surfaces qui admettent un groupe continu fini de transformations birationnelles en elles-mêmes se partagent en trois familles :

1° *Surfaces hyperelliptiques, douées d'un groupe* ∞^2 *de transformations échangeables;*

2° *Surfaces possédant un faisceau de courbes rationnelles;*

3° *Surfaces possédant un faisceau de courbes elliptiques.*

Le premier cas, à plusieurs égards le plus important, est caractérisé par M. Picard d'une façon complète : les coordonnées d'un point de la surface sont des *fonctions quadruplement périodiques de deux variables,* ou, si l'on aime mieux, la surface peut être représentée sur la variété des couples de points de la courbe de genre *deux* ([2]).

Dans le second cas, M. Painlevé a remarqué que la surface peut être transformée en une réglée, ce qui résulte à présent du théorème général du n° **21**.

Dans le troisième cas il y a lieu de pousser plus avant l'analyse des conditions pour lesquelles une surface, qui renferme un faisceau de courbes elliptiques, admet un groupe de transformations dont ces courbes sont les trajectoires.

Cette question délicate a été résolue par M. Painlevé ([3]). Il résulte

---

([1]) Enriques, *Annales de Toulouse,* 2e sér., t. III.

([2]) *Voir* ce Traité, t. II, Chap. XIV.

([3]) *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles* (Paris, Hermann, 1897), p. 285.



de ses recherches que si une surface admet un groupe continu de transformations birationnelles, dont les trajectoires sont des courbes elliptiques, les coordonnées des points de la surface peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles de

$$\wp(u + \lambda\omega + \mu\omega' \mid a\omega + b\omega',\ c\omega + d\omega'),\quad \wp'$$

et de v, w liées par une relation algébrique

$$f(v, w) = 0.$$

Les surfaces qui jouissent d'une telle représentation paramétrique ont été appelées *surfaces elliptiques;* elles sont caractérisées géométriquement par le fait de renfermer : 1° un faisceau, rationnel ou irrationnel, de courbes elliptiques ayant le même module; 2° un autre faisceau elliptique de courbes de genre quelconque, coupant les premières en $n = ad - bc$ points (¹).

Il y a lieu d'ailleurs de déterminer les différentes classes de surfaces elliptiques par une analyse de l'équation

$$f(v, w) = 0.$$

Parmi ces classes, il faut nommer les surfaces de genres

$$p_g = 0, \qquad p_a = -1,$$

dont nous avons donné les types au n° 26.

Nous pouvons maintenant résumer les résultats que nous venons d'exposer, en énonçant le théorème suivant :

Les surfaces qui admettent un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes rentrent dans trois familles :

1° *Surfaces hyperelliptiques,* douées d'un groupe transitif ∞^2 de transformations échangeables;

2° *Surfaces réglées,* douées (au moins) d'un groupe de transformations, dont les trajectoires sont des courbes rationnelles;

3° *Surfaces elliptiques,* admettant un groupe (au moins) de transformations, dont les trajectoires sont des courbes elliptiques.

Parmi ces surfaces, il y a en particulier les surfaces douées d'un *groupe transitif de dimension* $r > 2$; nous avons remarqué qu'*elles*

(¹) ENRIQUES, *Rendic. del Circolo di Palermo* (*loc. cit.,* 5 marzo).

se réduisent aux surfaces rationnelles et aux réglées elliptiques [1].

29. La question se pose maintenant de reconnaître si une surface donnée rentre dans une des familles de surfaces douées d'un groupe, qui sont classifiées dans le numéro précédent.

Nous allons rendre compte brièvement de l'analyse, qui a permis de répondre à cette question par la simple évaluation des caractères invariants de la surface [2].

On remarquera d'abord (avec M. Picard) que les surfaces hyperelliptiques ont

$$p_a = -1, \qquad p_g = 1,$$

et, ensuite, que les surfaces elliptiques ont

$$p_a = -1,$$

et que leur genre p_g est égal au genre du faisceau des trajectoires elliptiques du groupe.

Soit maintenant une surface, dont le genre arithmétique

$$p_a < 0.$$

Si $p_a < -1$, on tombe sur la famille des surfaces réglées (nº 27). Envisageons le cas

$$p_a = -1.$$

Il faut distinguer les hypothèses

$$p_g = 0, \qquad p_g > 1, \qquad p_g = 1.$$

Lorsque $p_g = 0$, la surface renferme un faisceau elliptique de courbes, et un second faisceau rationnel de courbes elliptiques (nº 26); elle est par conséquent une surface elliptique, ce qui résulte d'ailleurs de sa représentation paramétrique.

Lorsque $p_g > 1$, puisque

$$p_g > 2p_a + 3,$$

la surface renferme un faisceau irrationnel de genre > 1 de courbes

---

(1) CASTELNUOVO et ENRIQUES, *Comptes rendus,* juillet 1895.

(2) ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero; Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* t. XX).



(n° 9), qui sont d'ailleurs elliptiques. Une analyse approfondie montre que le genre du faisceau est précisément p_g.

Envisageons maintenant les $p_g + 1$ intégrales simples de première espèce, qui appartiennent à la surface (n° 8); parmi celles-ci il y en a p_g, correspondant au faisceau nommé, dont les périodes se réduisent à $2p_g$; on aura par suite une intégrale avec deux périodes distinctes, qui nous fournira sur la surface un second faisceau irrationnel, et précisément elliptique, de courbes. La surface est donc elliptique.

Soit enfin

$$p_g = 1.$$

Il y a deux intégrales simples de première espèce (n° 8), et, s'il n'y a pas de courbe canonique proprement dite, en dehors des courbes exceptionnelles, on sait que la surface est hyperelliptique ([1]).

Mais il peut se faire qu'il y ait une courbe canonique de genre $p^{(1)} = 1$; en ce cas, on trouve deux intégrales réductibles aux intégrales elliptiques et, par suite, deux faisceaux elliptiques de courbes, dont l'un est composé de courbes elliptiques, l'autre de courbes ayant un genre $\pi \geqq 1$. La surface admet en ce cas un groupe elliptique ∞^1; elle admet un second groupe analogue, et rentre comme cas particulier dans la famille des surfaces hyperelliptiques, seulement dans le cas $\pi = 1$.

Or, comment pourra-t-on distinguer les deux cas des surfaces hyperelliptiques et des surfaces elliptiques correspondant aux mêmes valeurs $p_g = 1$, $p_a = -1$?

Il suffira, pour cela, d'évaluer le genre d'ordre 4, P_4; on a, en effet,

$$P_4 = 1$$

dans le premier cas,

$$P_4 > 1$$

dans le second.

On peut résumer les résultats obtenus en énonçant le théorème suivant ([2]) :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface non rationnelle admette un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes, c'est que le genre arithmétique

$$p_a < 0.$$

([1]) PICARD; *voir* ce Traité, t. II, Chap. XIV, n° 17.

([2]) ENRIQUES, *voir* le second Mémoire cité ci-dessus.

On a des surfaces admettant un groupe rationnel (famille de réglées) pour $p_a < -1$, et des surfaces elliptiques ou hyperelliptiques si

$$p_a = -1;$$

le cas hyperelliptique étant déterminé par les valeurs

$$p_g = P_4 = 1.$$

Et, en rapprochant ce théorème de celui énoncé au n° **26**, on peut dresser le Tableau suivant :

	$p_a < -1$.	$p_a = -1$.	$p_a = 0$.
$P_4 + P_6 = 0$ $(P_4 = P_6 = 0)$	réglées de genre $-p_a$	réglées elliptiques	réglées rationnelles
$P_4 + P_6 > 0$ $p_g P_4 \neq 1$	impossible	surfaces elliptiques admettant un groupe ∞^1	
$P_4 + P_6 > 0$ $p_g P_4 = 1$ $(p_g = P_4 = 1)$	impossible	surfaces hyperelliptiques	

30. Il reste enfin à examiner les surfaces admettant une série continue de transformations, qui n'engendrent pas un groupe d'ordre fini.

Il y a lieu de remarquer d'abord qu'on peut construire une telle série sur les surfaces rationnelles et réglées. Or, le théorème du n° **23** nous a permis de démontrer réciproquement que ce cas est le seul possible.

Partons du système $|C|$ des sections planes de la surface f, et transformons-le, en lui appliquant successivement un certain nombre r de transformations arbitraires de la série; nous parvenons ainsi à un nouveau système $|C_r|$, qui doit avoir nécessairement des points-base multiples, si la série n'est contenue en aucun groupe fini. En faisant abstraction de ces points, on peut calculer le genre virtuel π_r et le

degré virtuel N_r de $|C_r|$. Or, on démontre que la différence $N_r - 2\pi_r$ peut être rendue aussi grande que l'on veut, en choisissant r assez grand.

Sur la surface existe donc un système tel que $N > 2\pi_r - 2$, d'où le théorème [1] :

Une surface admettant une série continue de transformations birationnelles en elles-mêmes, qui n'appartiennent à aucun groupe (d'ordre fini), *peut être transformée en une surface réglée* (rationnelle ou irrationnelle).

Si la série est transitive, la section plane de la surface réglée aura le genre 0 ou 1.

---

[1] CASTELNUOVO et ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali ... loc. cit.*, n° 19.

ERRATA ET ADDITIONS DU TOME I.

Page 26. Quand nous disons qu'une variété d'ordre $n-1$ dans un espace à n dimensions est toujours simple, il est entendu, comme il résulte des hypothèses du n° 2, que la surface n'a pas de ligne multiple. Autrement le théorème peut n'être pas exact; on sait qu'il existe, dans l'espace à trois dimensions, des surfaces fermées n'ayant qu'un côté, mais elles ont des lignes multiples.

Pages 74 et suivantes. La démonstration du théorème général relatif à la réduction des singularités d'une surface algébrique est incomplète. Aux Mémoires cités page 74, ajoutons les travaux de M. Beppo Levi (*Annali di Matematica pura ed applicata,* 2e série, t. XXVI, 1897, et *Comptes rendus,* t. CXXXIV, 1902, p. 222 et 642) qui résolvent complètement la question.

Page 118, ligne 4, *lire* $B\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *au lieu de* $B\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Page 118, dernière ligne, *lire* f'_y *au lieu de* f'_z.

Page 119, ligne 7, *lire* $\dfrac{\partial B}{\partial y}$ *au lieu de* $\dfrac{\partial B}{\partial x}$.

Page 120. M. Arthur Berry a démontré (*Acta mathematica,* t. XXVII) différents théorèmes relatifs à l'impossibilité pour une surface d'admettre des intégrales de première espèce. En particulier, une surface, dont les seules singularités sont des points doubles diminuant la classe de *deux* ou *trois* unités, ne peut avoir d'intégrales de première espèce.

Page 123, ligne 5 en remontant, *lire* z^{p-1} *au lieu de* z^p.

Page 136. La méthode pour déterminer les surfaces du *quatrième* degré ayant des intégrales différentielles totales de première espèce a été seulement indiquée. Ce sujet a été complètement traité depuis par M. Arthur Berry (*Comptes rendus,* septembre 1899 et *Cambridge philosophical Transactions,* vol. XVIII), par M. de Franchis (*Rendiconti di Palermo,* t. XIV), et par M. Lacaze dans sa thèse (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 1901).

Page 139, ligne 2 du n° 16, *lire* première *au lieu de* seconde.

Page 140, ligne 3 du n° 17, *lire* première *au lieu de* seconde.

Page 144. Nous avons démontré qu'une surface du cinquième degré avec une conique double ne peut avoir deux intégrales de première espèce qui ne soient pas fonctions l'une de l'autre. Dans un de ses Mémoires, M. Picard avait énoncé plus généralement le même théorème pour toutes les surfaces du cinquième degré de genre géométrique égal à *un.* M. Arthur Berry a fait récemment une étude très complète des surfaces du cinquième degré ayant des intégrales de première espèce (*Cambridge philosophical Transactions,* vol. XIX, part II, 1902, et vol. XX, part I, 1904). Il a établi, en particulier, sans faire aucune hypothèse

sur le genre, qu'une surface du cinquième degré ne peut avoir deux intégrales de première espèce qui ne soient pas fonctions l'une de l'autre.

Page 165, ligne 9, supprimer le dénominateur f'_z. Pour une formation plus explicite des équations relatives aux a, *voir* t. II, page 307.

Page 184, ligne 5, *lire* $x = \mathrm{X}z$ *au lieu de* $z = \mathrm{X}z$.

Page 185, ligne 3 en remontant, *lire* $\mathrm{X}z$ *au lieu de* $\mathrm{X}x$.

Page 186, ligne 5 en remontant, *lire* surface *au lieu de* courbe.

Page 188, lignes 7 et 8 en remontant. Il est dit qu'une certaine intégrale double reste finie, sauf pour l'origine. On vérifie aisément que cette intégrale reste finie même à l'origine en faisant le changement de variable

$$\frac{x}{y} = u,$$

u et z étant les nouvelles variables.

Page 223. Les questions étudiées dans la Section III ont fait l'objet d'une étude plus approfondie dans le Tome II (Chapitre II, Section V).

ERRATA ET ADDITIONS DU TOME II.

Page 43, à la seconde ligne du n° 32, *lire* minimum *au lieu de* maximum.

Page 128. Les résultats de cette page sont à rapprocher du théorème établi page 438.

Page 165, ligne 7, *au lieu de* ne deviennent pas infinies, *lire* ne deviennent pas infinies pour $x = a$.

Page 186. Le nombre désigné par ρ dans le Chapitre VII a été ultérieurement désigné par ρ_0. *Voir* d'ailleurs, sur ce changement de notation, page 289, en note.

Page 207. Nous avons supposé en différents endroits du Chapitre VIII que nous nous trouvions dans le cas général où les deux nappes se croisant le long de la courbe double n'étaient pas distinctes. On peut toujours le supposer, en faisant une transformation birationnelle préalable. L'étude directe du cas où il en serait autrement ne présente, d'ailleurs, aucune difficulté dans les réductions faites ultérieurement.

Page 366. Dans l'égalité (R) mettre la limite inférieure b_i dans l'intégrale $\int_{b_i}^{y} \Omega_i(y)\,dy$.

Page 371, ligne 6 du n° 21, *lire* sous des conditions, *au lieu de* sans des conditions.

Page 412. D'après ce qui a été vu page 358, on peut dire que la relation (13) exprime le caractère invariant (au sens relatif) des cycles à *deux* dimensions d'une surface algébrique.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME II.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

CHAPITRE X.

CHAPITRE XI.

CHAPITRE XII.

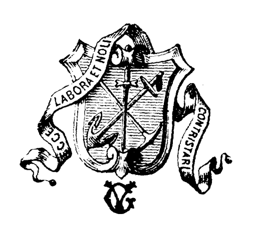


CHAPITRE XIII.

CHAPITRE XIV.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME II.

27168 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.


LABORA ET NOLI
CONTRISTARI